Partie II :	***Chapitre 4 Polynômes, équations et racines $n^{ièmes}$ de l'unité.***

I-Les polynômes

Définition

Soit n un entier naturel, et $a_0, a_1, \dots \dots, a_n$ des nombres complexes avec $a_n \neq 0$.

On appelle fonction polynôme (on dit aussi polynôme) toute fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par :

Pour tout nombre complexe z, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Les nombres $a_0, a_1, \dots \dots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme P.

L'entier naturel n est appelé le degré du polynôme P.

Des polynômes formés d'un seul terme sont appelés des monômes.

Cette année, le plus souvent, les coefficients du polynôme seront des réels.

Exemples

- La fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^2+2z - 1{,}4$ est une fonction polynôme de degré ….
- Le coefficient des z^2 (comprendre le coefficient multiplicateur des z^2) est égal à …..
- Le coefficient des z est égal à …..
- Le coefficient des constantes (c'est-à-dire des z^0) est égal à …….

La fonction Q définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q(z) = -4z^3 + 8z^2 - 11z + 1$ est une fonction polynôme de degré 3. Préciser ses coefficients.

$9z^2$; $3z$; z^3 ; $-\frac{1}{7}z^4$ sont des exemples de monômes.

Remarque :

La définition exclut donc la fonction nulle.

On appelle polynôme nul, la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 0$.

Attention toutefois, on ne parle pas de degré pour un tel polynôme (tout au moins cette année, l'année prochaine, vous ferez une construction rigoureuse de l'ensemble des polynômes, et vous verrez qu'on donne au polynôme nul le degré $-\infty$.

Définition

Soit P un polynôme.

♥♥ On appelle racine de P (ou encore zéro de P), tout nombre complexe a tel que $P(a) = 0$. ♥♥

Exemple

P est définie par $P(z) = 3z - 1$, déterminer l'unique racine de P.

Q est définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q(z) = 2z^2 + z + 1$. Déterminer les racines de P.

Nous allons voir le rôle essentiel joué par les racines d'un polynôme.

✂---

Propriété clé

Pour tous nombres complexes a et z, et pour tout entier naturel n ***non nul***, on a l'identité suivante à connaître par cœur :

♥♥ $z^n - a^n =$ .... $= (z-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$ ♥♥

Preuve :

✂---

Remarque

Cette nouvelle identité permet essentiellement de factoriser les différences de deux puissances de même exposant.

Exemples

Factoriser les expressions suivantes : $a)$ $z^3 - 8$; $b)$ $z^3 + i$

Remarque : Soit a un nombre complexe.

Un polynôme P est dit factorisable par $z - a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre complexe z on ait : $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Dans le cas où P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire lorsque P est non constant, on a la relation importante suivante entre le degré de P et celui de Q :
♥♥ $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. ♥♥

Théorème fondamental

Soit P un polynôme et a un nombre complexe.

a est racine de P si et seulement si P est factorisable par $z - a$.

Preuve :

✂---

Remarque concernant les polynômes de degré 2 déjà rencontrés :

Si P est défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$, et si $\Delta \neq 0$, on sait que P admet deux racines z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.

Redémontrer le résultat vu en première dans le cas réel : pour tout nombre complexe z, on a :

$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Application : factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme : $P(z) = 3z^2 + \sqrt{3}z + 1$.

✂---

Exercice 1

Soit α un nombre réel et (E) l'équation : $z^2 - 2\cos(\alpha)\, z + 1 = 0$.

Résoudre cette équation en donnant les solutions sous forme exponentielle. En déduire une factorisation de la fonction trinôme définie pour tout nombre complexe z par : $z^2 - 2\cos(\alpha)\, z + 1$

Exercice 2

Soit P le polynôme définit pour tout nombre complexe z par : P(z) $= z^3 + 2z^2 - 1$.

1) Trouver une racine réelle évidente de P.
2) En déduire une première factorisation de P, puis déterminer les autres racines de P ainsi qu'une factorisation en produit de trois polynômes de degré 1.

Lemme d'identification

Soit n un entier naturel, et $a_0, a_1, \dots\dots, a_n$ des nombres complexes.

Pour tout nombre complexe z, P(z) $= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0\,;n]\!], a_k = 0$.

Cette propriété dit donc qu'une somme de monômes est nulle si et seulement si chacun des coefficients des monômes est nul.

Preuve :

✂---

Cette propriété est à la base de la méthode d'identification que l'on va développer dans l'exercice suivant :

Exercice 3

Soit P le polynôme définit pour tout nombre complexe z par : P(z) $= z^4 - 4z^2 - z + 2$.

1) Etablir que 2 est racine de P.
2) En déduire une factorisation de P par deux méthodes différentes.

✂---

Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit (E) l'équation : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

a) Vérifier que 1 et -2 sont racines de (E).
b) En déduire que pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = P(z) \times Q(z)$, où P et Q sont deux fonctions polynômes de degré 2 que l'on déterminera.
c) Résoudre alors (E).
d) Les solutions de (E) sont les affixes de quatre points A, B, C et D du plan, avec A ayant pour affixe 1, B ayant pour affixe -2, et C ayant une partie imaginaire positive.

Le quadrilatère ACBD est-il un losange ? Justifier.

✂---

Exercice 5

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : P(z) $= z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 5z + 6$.

1) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.
2) Montrer que i est racine de P.
3) En déduire une autre racine de P, puis une factorisation de P.

✂---

Exercice 6

On considère la fonction polynôme définie sur ℂ par : $P(z) = z^4 + 4$.

1) Démontrer que si un nombre complexe z est racine de P, alors les nombres complexes -z, $\bar{z}$ et $-\bar{z}$ sont aussi des racines de P.
2) Justifier que $z = 1 + i$ est racine de P. On pourra commencer par donner la forme exponentielle de $1 + i$.
3) En déduire une factorisation de P en produit de facteurs du premier degré.

✂---

Théorème

Soit n un entier naturel non nul.

Tout polynôme P de degré n admet au plus n racines dans ℂ.

Preuve :

✂---

Exercice 7

On considère la fonction polynôme définie sur ℂ par : $P(z) = z^3 + (1 - 3i)z^2 + (-2 - 3i)z - 2$.

Matt affirme que : -1, i et $2i$ sont les racines de P et qu'il n'y en a pas d'autre. Expliquer pourquoi *Matt* dit vrai.

✂---

Citons culturellement l'un des théorèmes les plus importants sur les polynômes appelé le théorème de d'Alembert-Gauss : ***Tout polynôme non constant admet dans ℂ au moins une racine.***

Cette propriété est-elle encore vraie dans ℝ ?

Démontrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine dans ℝ.

✂---

II- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

♥♥ On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité (= le nombre 1), tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. ♥♥

En d'autres termes, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les racines de la fonction polynôme P définie sur ℂ par : $P(z) = z^n - 1$.

Exemple

Si $n = 1$ trouver les racines ($1^{\text{ième}}$) de l'unité. Idem avec $n = 2$.

✂---

Nous allons voir qu'il est possible d'expliciter les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, quelle que soit la valeur de n.

Théorème

Pour tout entier naturel n non nul, l'équation $z^n = 1$ admet, ***dans* $\mathbb{C}$,** n solutions distinctes qui sont les nombres complexes suivants : ♥♥

Ainsi, il y a donc $\boldsymbol{n}$ racines $\boldsymbol{n}^{\text{ième}}$ de l'unité.

Preuve :

Définition

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

On a donc : $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0\,; n-1]\!]\right\} = \{\omega^k, k \in [\![0\,; n-1]\!]\}$, en notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Exemple : Déterminer $\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, et\ \mathbb{U}_4$.

✂--

Propriété

Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, les points image des affixes des éléments de $\mathbb{U}_n$ appartiennent au cercle unité $\mathbb{U}$, et forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Preuve :

$Card(\mathbb{U}_n) = n$. Donc : $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des affixes des sommets d'un polygone à n côtés.

Soit d_k la distance entre deux racines $n-$ ièmes de l'unité consécutives.

$$d_k = \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k-1)\pi}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{i\frac{-2\pi}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|\left|1 - e^{i\frac{-2\pi}{n}}\right| = \left|1 - e^{i\frac{-2\pi}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{-\pi}{n}}\right|\left|e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{-\pi}{n}}\right|$$

Donc : $d_k = |2\sin(^{\pi}/_{n})|$, indépendamment des racines choisies.

Soit θ_k l'angle à l'origine formé par deux racines $n-$ ièmes de l'unité consécutives.

$$\theta_k = \arg\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) - \arg\left(e^{i\frac{2(k-1)\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n} - \arg\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{i\frac{-2\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n} - \left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{-2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}$$

Donc : $\theta_k = {}^{2pi}/_{n}$, indépendamment des racines choisies.

Donc : $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans $\mathbb{U}$.

Illustration dans les cas où :

$n = 3$: $n = 4$:

✂--

Remarque : l'un des sommets de ce polygone régulier est le point d'affixe 1.

Exercice 8

1) Démontrer que le polygone régulier à n sommets formé par les points image des affixes des éléments de $\mathbb{U}_n$ admet toujours l'axe des réels comme axe de symétrie.

2) A quelle condition nécessaire et suffisante ce polygone admet-il l'origine du repère comme centre de symétrie ?

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(z+2i)^3 = 1$, En déduire les solutions de : $(z+2i)^3 = 64$.

✂---

Exercice 10

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On notera $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Calculer chacune des quantités suivantes :

a) ♥♥La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ce résultat est classique, à savoir par cœur. ♥♥
b) Le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

III- Formule du binôme de Newton

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On (r)appelle que la factorielle de n, que l'on note $n\,!$ le produit des entiers naturels compris au sens large entre 1 et n.

On a donc : ♥♥ $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n$. ♥♥

Exemple : calculer :

2! = ; 3! = ; 4! = ; 5! = .

On admet que 0 ! existe et est égal à 1 et de même 1 ! est égal à 1. (Sera (a été) expliqué au chapitre dénombrement de spécialité maths.

On a de façon évidente : pour tout entier naturel n : ♥♥$\boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!}$♥♥.

En cours de spé maths, on a défini rigoureusement ce que sont les coefficients binomiaux.

Prenons pour point de départ la définition suivante :

Définition

Soit n un entier naturel, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle coefficient binomial “ k parmi n ” le nombre noté : $\binom{n}{k}$ et défini par :

♥♥ $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ♥♥

Remarques

- En probabilité, lors de la loi binomiale, vous avez déjà rencontré les coefficients binomiaux.

$\binom{n}{k}$ désigne, sur un arbre de probabilités, le nombre de chemins conduisant à k succès lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli.

- $\binom{n}{k}$ est donc un entier naturel.

-Si $k > n$, on a donc : $\binom{n}{k} = \ldots.$

Propriété des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n et tout k tel que $0 \leq k \leq n$:

i) ♥♥*Formule de symétrie :* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ♥♥.

ii)♥♥*Formule du triangle de Pascal :* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. ♥♥

Preuve :

Consultez vos cours de spécialité maths, (en revenant à la définition, c'est du calcul fractionnaire).

✂---

Triangle de Pascal donnant les valeurs de $\binom{n}{k}$ ***pour tous entiers k et n tels que : 0≤ k ≤n≤ 10.***

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Pour tous nombres complexes a et b, et tout entier naturel n, on a la relation suivante, appelée formule du binôme de Newton :

♥♥♥♥ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$ = = ♥♥♥♥

Preuve :

Traitons à part le cas où $n = 0$:

Pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$, *et* $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation : pour $n = 1$, $(a+b)^1 = a+b$, et $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$ car :

$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que :

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$: (Hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que : $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

Or, $\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

En développant :

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}}$$ **car a et b** sont indépendants de k.

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}}$$

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \; \textit{car} \; \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.}$$

Or, *en faisant le changement d'indice* : $\boldsymbol{j = k+1}$, $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)}}$: *en effet* :

$j = k+1$ donc $k = j-1$, et comme la variable j est muette, la dernière somme obtenue peut se réécrire en :

$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}}$, de sorte que : $\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}}$

Ainsi en regroupant les deux sommes qui ont même indice et mêmes bornes, et en étant convaincus que pour toute familles de nombres complexes : ♥♥ $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)$ ♥♥ :

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right] + b^{n+1}.}$$

$$\boldsymbol{(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \; (\textit{factorisation par } a^k b^{n+1-k}).}$$

Or d'après la formule du triangle de Pascal : $\boldsymbol{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$, de sorte que :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{n+1} = \boldsymbol{a}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \boldsymbol{a}^{k}\boldsymbol{b}^{n+1-k} + \boldsymbol{b}^{n+1}$$

En observant que : $\binom{n+1}{n+1} \times a^{n+1} \times b^{n+1-(n+1)} = 1 \times a^{n+1} \times b^{0} = a^{n+1}$ et que de même :

$b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{0} b^{n+1-0}$, on a donc :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \boldsymbol{a}^{k}\boldsymbol{b}^{n+1-k}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Initialisée et héréditaire à tout ordre, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n non nul, et encore vraie si $n = 0$, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Expliquons enfin pourquoi :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boldsymbol{a}^{k}\boldsymbol{b}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^{k}$$

Observons que sa première formulation fait apparaître une somme de termes avec des exposants de a placés par ordre décroissant, tandis que la seconde fait apparaitre une somme de termes avec des exposants de a placés par ordre croissant (<u>on privilégie en général cette dernière écriture en algèbre</u>).

Cette formule, d'un usage récurrent post bac permet de développer une puissance entière d'une somme de deux termes, et aussi de factoriser.

<u>Exemples d'utilisation</u> *:*

1) Appliquer la formule du binôme de newton avec $n = 2$ puis $n = 3$ puis $n = 4$. Développer $(a-b)^{n}$.

2) Quel est le coefficient multiplicateur du terme en $a^{5}b^{3}$ dans le développement de $(a+b)^{8}$?

3) *a)* Donner la forme développée de : $(1+z)^{n}$ *où* $z \in \mathbb{C}$.

b) En déduire la valeur des sommes suivantes :

i) $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$.

ii) $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k}}$.

iii) Déduire de *i)* et *ii)* les égalités suivantes pour $n \geqslant 1$: $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}}$.

iv) Matt fait le clown et se casse la figure dans les escaliers. Il a un sac de billes en main, et chaque bille, indépendamment les unes des autres, sort du sac avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

Calculer la probabilité pour qu'il reste un nombre pair de billes dans le sac.

v) En faisant $z = i$ dans la question 3a), calculer : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{2k+1}$.

✂---

Exercice 11

Soit x un réel et n un entier naturel non nul.

a) Etablir que : $e^{ix} + 1 = 2cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$.

b) En déduire l'écriture algébrique de : $\left(e^{ix} + 1\right)^n$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

✂---

Exercice 12

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre :$(\sqrt{5} + 1)^{2n}$+$(\sqrt{5} - 1)^{2n}$ est entier.

vi) n est un entier naturel non nul.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^n$.

En calculant de deux façons différentes la dérivée de f, établir que : $\sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

✂---

Exercices issus de PCSI-MPSI

on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, avec l'entier $n \geq 1$. Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k \ , \ \prod_{k=0}^{n-1}(a + b\omega^k) \ , \ \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$$

✂---

Exercice 97 On considère le polynôme (à coefficients complexes) :

$$P(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right).$$

1. Déterminer les racines du polynôme P, à l'aide des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Vérifier qu'elles sont toutes réelles, puis que cela pouvait se prouver sans les calculer !
2. Vérifier qu'il existe des réels a, b et c tels que $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$. En déduire les racines de P sous une autre forme.
3. En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 99 Soit l'équation (E) : $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

1. Développer et simplifier (E), en déduire les racines de (E).
2. Exprimer les solutions de (E) à l'aide des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Simplifier ces expressions.
3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 107 Déterminer toutes les racines du polynôme $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X^2 + X + 1$ où n est un entier, $n \geq 2$. Justifier $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$. En déduire l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Formule du binôme

Exercice 56 Calculer rapidement, et sans calculatrice : $999\,999^3$.

Exercice 57 Le coefficient du terme en x^6 de $A = \left(2x^3 + \frac{\sqrt{3}}{x}\right)^{10}$ est de la forme $2^a 3^b 5^c 7^d$.
Trouver a, b ,c, d.

Exercice 58 Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ 3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ 4. $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$
5. $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-n}$

Exercice 59 Soit des entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$.

1. Vérifier l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Retrouver cette somme à l'aide de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
3. En s'inspirant d'une des méthodes précédentes, calculer $T = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 60 Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = (\cos x + \sin x)^5 + (\cos x - \sin x)^5$.
Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(\cos x)$ pour tout x réel.

Exercice 61 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que, sous réserve d'existence, $\tan(nx) = \dfrac{\binom{n}{1}\tan x - \binom{n}{3}\tan^3 x + \binom{n}{5}\tan^5 x - \ldots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\tan^2 x + \binom{n}{4}\tan^4 x - \ldots}$.

Indication : vérifier $\tan(nx) = \dfrac{\operatorname{Im}\left[(1+i\tan(x))^n\right]}{\operatorname{Re}\left[(1+i\tan(x))^n\right]}$. Application : $\tan(5x) = \cdots$.

Exercice 62 Soit $n = 3p+2$, un entier congru à 2 modulo 3.

On pose $S_0 = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{3k}$, $S_1 = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{3k+2}$.

1. Montrer que $S_0 = S_2$.
2. Simplifier $S_0 + S_1 + S_2$.
3. On rappelle qu'on note $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$. Exprimer $(1+j)^n$ à l'aide de S_0, S_1 et S_2.
4. Calculer S_1, S_2 et S_3 : en donner une expression réelle.