« Au commencement, Dieu a créé les entiers naturels, le reste est l'oeuvre de l'homme. » Georg Cantor.

Partie 1 : Arithmétique

Du grec ancien, ἀριθμός, arithmos en grec moderne, signifie le nombre : l'arithmétique est la science qui étudie les nombres entiers et leurs propriétés.

Chapitre 1 : Divisibilité et congruences

I- L'ensemble des entiers naturels et les autres ensembles de nombres.

La citation ci-dessus d'un grand mathématicien allemand permet d'entreprendre l'importance des entiers naturels.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\ldots\ldots ; 9 ; 10 ; \ldots\ldots\}$.

Chacun des éléments de cet ensemble est appelé un entier naturel.

Les chiffres sont au nombre de dix, ce sont les entiers naturels suivants : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9.

$\mathbb{N}$ a été décrit axiomatiquement par ***Giuseppe Peano*** à la fin du dix-neuvième siècle.

Un axiome, ou encore postulat, est une vérité universelle et à partir de laquelle on va construire une théorie formée de théorèmes, propriétés etc.

Par exemple, en géométrie euclidienne, par deux points distincts il passe une seule droite est un des axiomes d'Euclide.

Par un point non situé sur une droite, il existe une seule parallèle à cette droite et passant par ce point est un autre axiome d'Euclide.

Voici les 5 axiomes de ***Peano*** définissant rigoureusement l'ensemble $\mathbb{N}$:

1) 0 ***est un entier naturel.***

2) ***Tout entier naturel n, a un unique successeur qui est l'entier naturel*** $n+1$. (***n et*** $n+1$ ***sont appelés entiers consécutifs***).

3) 0 ***ne succède à aucun entier naturel.***

4) ***Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.***

5) ***Si un ensemble formé par des entiers naturels contient l'entier*** 0, ***ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est*** $\mathbb{N}$.

Ces axiomes sont " naturels ". Le premier axiome dit que $\mathbb{N}$ est non vide, le second permet de dire que $\mathbb{N}$ est un ensemble ayant une infinité d'éléments, le troisième axiome dit que 0 est le plus petit des entiers naturels, le quatrième dit qu'il y a unicité de chaque entier naturel, et enfin, le cinquième axiome est à la base du principe du raisonnement par récurrence qui sera étudié cette année.

Remarques

La somme, le produit d'entiers naturels est un entier naturel.

On dit que $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication.

Par-contre, $\mathbb{N}$ n'est pas stable par soustraction.

Par exemple 3 et 7 sont des entiers naturels, et ……

Pour pallier le fait que la différence d'entiers naturels n'est pas nécessairement un entier naturel, on a créé l'ensemble des entiers relatifs.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots\}$.

$\mathbb{Z}$ est donc formé par les entiers naturels, ainsi que leurs opposés.

Remarques

- $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, ce que l'on notera $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lire : l'ensemble $\mathbb{N}$ est contenu (ou inclus) dans l'ensemble $\mathbb{Z}$).
- L'ensemble $\mathbb{N}$ admet une infinité d'éléments, ***a fortiori***, il en est de même pour $\mathbb{Z}$.
- La somme, le produit d'entiers relatifs est un entier relatif. On dira que $\mathbb{Z}$ est stable par produit et somme.
- Dans le langage parlé, quand on dit entier, c'est sous-entendu qu'on parle d'entier relatif.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il stable par quotient ?

Les nombres entiers permettent de construire de nouveaux ensembles de nombres.

Depuis l'école primaire, vous connaissez les nombres décimaux : les écoliers les reconnaissent par la présence d'une virgule, et par le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

C'est par exemple le cas des nombres suivants : 2,236 ; -4,5 ; 11,001.

Donnons une définition rigoureuse de nombre décimal :

Définition

Un nombre N est dit décimal lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $N = \dfrac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : on a donc : $\mathbb{D} =$

Par exemple, $\frac{13}{10}$; $\frac{-3}{100}$ sont des nombres décimaux.

Expliquer pourquoi $\frac{1}{4}$ est décimal.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. Pourquoi ?

L'ensemble $\mathbb{D}$ est stable par addition, soustraction, multiplication.

$\mathbb{D}$ n'est pas sable par quotient. En seconde, vous avez établi que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal bien que 1 et 3 soient des entiers, et donc des décimaux.

Définition

ratio signifie en latin la raison. On appelle ***nombre rationnel*** tout nombre qui peut s'écrire sous forme fractionnaire $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul : a est appelé ***le numérateur*** de la fraction et b son ***dénominateur*** !

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On a donc : $\mathbb{Q}$ =

Remarques

$\mathbb{Q}$ est stable par addition, soustraction multiplication et division, et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

On pourrait donc penser qu'on a fait le tour de l'ensemble des nombres connus, cependant, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. (Vous l'avez peut-être justifié en seconde, et on démontrera ce résultat de plusieurs façons différentes dans des chapitres ultérieurs d'arithmétique).

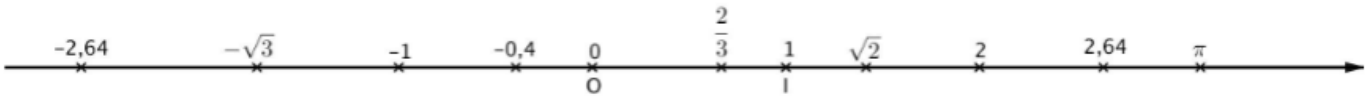
Définition

Un nombre réel est un nombre dont l'écriture décimale comporte un nombre fini ou infini de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. Il contient tous les nombres que vous connaissez à ce jour, y compris $\sqrt{2}$; e ; π ...

Donnons une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

Considérons une droite graduée, c'est-à-dire une droite munie d'une origine O, à laquelle on associe le nombre 0, et sur laquelle est placé un point I auquel on fait correspondre le nombre 1 : on peut alors graduer la droite.

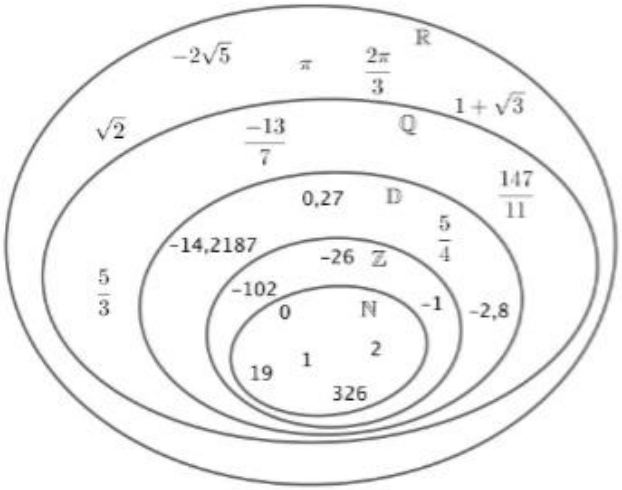
Illustration :



A chacun des points de cette droite, est associé un unique réel, appelé l'abscisse du point.

Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.

Résumé et positionnement des différents ensembles rencontrés :



Notations :

19 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$, se note :

-3,4 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Z}$, se note :

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et ces inclusions sont strictes.

$\mathbb{D}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Z}$, se note :

L'équation : $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle. Pourquoi ?

Cette année, dans le cours de maths expertes, on verra qu'il existe un autre ensemble de nombres, appelé l'ensemble des nombres complexes, et noté $\mathbb{C}$, dans lequel cette équation admet deux solutions.

II- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Conseil* : *revoyez (ou apprenez) vos tables de multiplications !!!!

Définition cruciale (on la mémorise par cœur, c'est la base de l'arithmétique !).

Soient a et b deux entiers avec $b \neq 0$.

♥♥♥ ***On dit que b est un diviseur de a s'il existe un entier relatif k tel que*** : ♥♥♥

Dans ce cas, on dit aussi que b divise a, ou encore que : a est divisible par b, ou encore que : a est un multiple de b.

Il faut savoir jongler entre ces notions.

On adoptera la notation conventionnelle suivante : $b \mid a$ pour dire que b est un diviseur a.

Exemples

- 5 divise 20 : en effet, on a $20 = 4 \times 5$. (Ici $k = 4$ est bien entier !).
- -9 est un diviseur de 45 : en effet, $45 = -5 \times (-9)$.
- 8 n'est pas un multiple de 3 : en effet, il n'existe aucun entier relatif k tel que $8 = 3k$. Récitez la table de 3 si vous avez un doute !
- 0 est un multiple de tout entier b car :

  Par-contre, 0 n'est diviseur d'aucun entier !

♥♥***Définition*** : Un entier est dit pair lorsqu'il est divisible par 2 (ou encore s'il est multiple de 2). ♥♥

" n est un entier pair " se traduit mathématiquement par : " il existe un entier k tel que : …….. ".

Un entier est dit impair s'il n'est pas divisible par 2, c'est-à-dire s'il n'est pas pair.

Au paragraphe division euclidienne, on expliquera pourquoi, tout entier n impair, peut toujours s'écrire sous la forme : ♥♥……..♥♥

Exercice 1

1) Démontrer que pour tous entiers relatifs x et y, $35x - 56y$ est divisible par 7.

2) Démontrer que si un entier b non nul est un diviseur d'un entier a, alors b^2 est un diviseur de a^2.

✂----------

Exercice 2

a) Déterminer tous les entiers naturels qui sont des diviseurs de 12.

b) En déduire les diviseurs de 12 dans $\mathbb{Z}$.

✂----------

Propriété

Tout entier a admet les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$ que son opposé $-a$.

Ainsi, pour tous entiers a et b avec $b \neq 0$:

b divise a équivaut à dire que $-b$ divise a, ce qui équivaut à dire que b divise $-a$ ou encore à $-b$ divise $-a$.

Preuve :

✂----------

En pratique, on se limitera très souvent à étudier la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3

Déterminer tous les entiers, puis tous les entiers naturels n, tels que 5 soit un diviseur de $n+17$.

✂----------

Propriété

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, si b est un diviseur de a, alors : $1 \leqslant b \leqslant a$.

Tout entier relatif n non nul admet un nombre fini de diviseurs compris entre $-|n|$ et $|n|$.

Preuve :

✂----------

Remarque : Tout entier non nul admet par-contre une infinité de multiples.

Si a désigne un entier non nul, on note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a :

$a\mathbb{Z} =$

III- Différents modes de raisonnement

Exercice 4 ***(raisonnement direct)***

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $(4n+3)^2 - 81$ est divisible par 8.

2) Déterminer les entiers n tels que $2n - 5$ soit un diviseur de 6.

✂----------

Exercice 5 ***(prouver qu'une implication est vraie, fausse).***

1)

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

a) Si un entier n est divisible par 3, alors il est divisible par 6.

b) Réciproque de l'affirmation *a*), que l'on commencera par énoncer.

Exercice 6 ***(raisonner par disjonction de cas).***

Démontrer que pour tout entier naturel n, n^2+3n est un entier pair.

✂----------

Exercice 7 ***(raisonner par l'absurde).***

1) Démontrer qu'il n'existe aucun entier qui soit à la fois pair et impair.
2) Démontrer que pour tout entier n, $3n+4$ n'est jamais divisible par 3.
3) Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $x + y \notin \mathbb{Q}$.

✂----------

Exercice 8 ***(raisonner par contraposée).***

1) Donner une phrase logiquement équivalente à : « S'il pleut, alors il y a des nuages ».

De façon générale, une implication a même valeur de vérité que sa contraposée, c'est-à-dire que si l'une est vraie, l'autre est également vraie, et si l'une est fausse, l'autre est également fausse.

Schéma du principe de contraposition :

Toute proposition conditionnelle de la forme (Si P, alors Q) équivaut à :

2) n désigne un entier. Démontrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

✂----------

Exercice 9 ***(équations diophantiennes)***

a) Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que : $x^2 - y^2 = 15$.
b) En déduire tous les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 15$.
c) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 16$.

✂----------

Exercice 10

1) Justifier que pour tout réel $q \neq 1$, on a : $q^{n+1} - 1 = (1 + q + q^2 + \cdots . + q^n)(q - 1)$.

On note, pour éviter les points de suspension : $1 + q + q^2 + \cdots . + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

2) Soit a un entier différent de 1.
a) Montrer que $a^{12} - 1$ est divisible par $a - 1$.
b) Montrer que $a^{12} - 1$ est divisible par $a^2 - 1$.
c) Montrer que $a^{12} - 1$ est divisible par $a^6 - 1$.
3) Soit a un entier différent de 1, n un entier naturel non nul, et d un diviseur de n.
Montrer que $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.
4) On considère le nombre N = 999999…..9 dont l'écriture décimale comporte exactement 2023 fois le chiffre 9.

Démontrer que N est divisible par K = 99999999999999999. (Le 9 figure 17 fois dans l'écriture décimale de K).

✂----------

IV- Propriétés fortes de la divisibilité

Propriété de transitivité de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soient a, b et c des entiers avec a et b non nuls. Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.

Exemple : 7 divise 14 et 14 divise 154, donc 7 divise 154.

Preuve :

✂----------

Exercice 11

Existe-t-il un entier n qui soit un multiple de 9 et un diviseur de 300 ?

✂----------

Définition

♥♥ *Soit a et b deux entiers. On appelle* ***combinaison linéaire des entiers a et b*** *toute expression de la forme :* ***$au+bv$, où u et v sont des entiers.*** ♥♥

Exemples : $2u+3v$ est une combinaison linéaire des entiers 2 et 3.

La somme, la différence de deux entiers est une combinaison linéaire de ces deux entiers. Pourquoi ?

Propriétés phare de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soit d un entier non nul, et a et b des entiers.

Si d divise a et si d divise b, alors :

- d divise …….
- d divise ……..
- Plus généralement, d divise toute combinaison linéaire de a et b. c'est-à-dire que pour tous entiers u et v, d divise ……

Exemple :

14 divise 140 et 14 divise 28, donc 14 divise $140+28 = 168$,

14 divise $140 - 28 = 112$

Et par exemple, 14 divise $3\times140 - 7\times28 = 224$.

Preuve de la propriété phare :

✂----------

Exercice 12

Déterminer tous les entiers n tels que : $3n+2$ divise $n-4$.

Indication : on pourra commencer par chercher une combinaison linéaire des entiers $3n+2$ et $n-4$ qui est indépendante de n.

✂----------

Exercice 13

i) a et b étant des entiers, développer $(a+b)^3$. Vous pouvez retenir ce résultat souvent utilisé.

ii) Démontrer que 3 est un diviseur de $(a+b)^3$ si et seulement si 3 est un diviseur de a^3+b^3.

✂----------

V- Division Euclidienne

Euclide **(Εὐκλείδης /** ***Eukleídês)*** **était un mathématicien** ***Grec*** **(trois siècles avant** ***J.C*** **environ) dont les travaux sont à la base de la géométrie et de l'arithmétique, entre autres, son œuvre majeure s'appelle les** ***Eléments*****,** ***Euclide*** **est le précurseur de la démonstration hypothético-déductive que vous pratiquez en Mathématiques depuis le collège !**

On peut facilement déduire la propriété suivante (parfois appelée principe du bon ordre) et qui va nous être utile pour la suite :

Toute partie non vide incluse dans $\mathbb{N}$ ***admet un plus petit élément.***

Exemple : L'ensemble {1 ; 5 ; 8} est une partie non vide de $\mathbb{N}$ dont le plus petit élément est …..

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit a un entier relatif, et b un entier naturel non nul.

Alors, il existe un unique couple d'entiers (q ; r) tels que : $a = bq + r$ ***et*** $0 \leq r < b$.

Définition

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer le couple $(q ; r)$ de l'écriture précédente.

Dans cette division euclidienne, a est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient entier et r le reste.

Attention au fait que le reste est toujours un ***entier naturel*** STRICTEMENT inférieur au diviseur !

Dans une telle division euclidienne, le reste peut prendre b valeurs qui sont : 0 ; 1 ; ……. ; $b-1$ c'est-à-dire tous les entiers naturels strictement inférieurs à b.

Disposition pratique :

Preuve du théorème de la division euclidienne :

Il y a deux points à justifier : l'existence d'une part d'un couple (q, r), et l'unicité d'autre part de ce couple :

Existence *(Il est normal de trouver ardue cette preuve pour un débutant. Arriver à comprendre la démonstration après plusieurs essais et relecture, c'est déjà se diriger vers un excellent niveau en mathématiques).*

- Commençons par traiter le cas où a est un entier naturel :

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / nb > a\}$.

Il est facile de voir que E est non vide : en effet, comme b est un entier naturel non nul, on a : $b \geqslant 1$.

Donc comme a est ici entier naturel, $a+1 \geqslant 1 > 0$. Et par suite, $(a+1)\times b \geqslant (a+1)\times 1$ vu qu'on ne change pas le sens des inégalités si on multiplie chacun des deux membres par le même nombre strictement positif.

Ainsi, l'entier $a+1$ appartient à l'ensemble E qui est donc non vide.

Vu que E est une partie incluse dans $\mathbb{N}$ par définition, et qu'elle est non vide, la propriété du bon ordre de $\mathbb{N}$ permet de dire que E admet un plus petit élément, appelons-le m.

Définissons l'entier q en posant : $q = m - 1$: par définition de m (plus petit élément de E), comme $q < m$, on peut dire que $q \notin E$, et donc : $qb \leqslant a$.

Comme $m = q+1$ appartient à E, on a par définition de E : $(q+1)b > a$.

Par suite on a la double inégalité : $\boxed{qb \leqslant a < (q+1)b}$.

Cette dernière se réécrit encore, en soustrayant qb dans chacun des membres : $0 \leqslant a - bq < b$.

On pose enfin $r = a - bq$: r est bien entier comme somme et produit d'entiers, et r vérifie l'encadrement précédent, à savoir : $0 \leqslant r < b$.

Ainsi, on a établi l'existence d'un couple (q, r) d'entiers tels que : $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

- Cas où a est un entier strictement négatif.

L'idée est de se ramener au cas précédent : en effet, si $a < 0$, alors $-a > 0$, donc $-a$ est un entier naturel non nul, et on applique le point précédent : il existe des entiers, appelons-les q' et r' tels que : $-a = bq' + r'$ avec : $0 \leqslant r' < b$.

-Si $r' = 0$, alors $a = b(-q')$ et on a bien l'existence cherchée (le quotient est $-q'$ et le reste 0).

-Si $r' > 0$: on a $0 < r' < b$.

Donc $a = -(bq'+r') = b(-q') - r'$ avec : $-b < -r' < 0$. (On a multiplié par -1 (< 0) les membres de la précédente inégalité).

Avec cette astuce belge, $-q' = -q' - 1 + 1$ on a :

$a = b(-q'-1+1) - r' = b(-q'-1) + b - r'$ et $0 < b - r' < b$.

Ainsi, notant $Q = -q'-1$ et $R = b - r'$, on a bien : $a = bQ + R$ avec $0 < R < b$.

Bref dans tous les cas de figure, on a bien l'existence d'un couple d'entiers (q, r) tel que :

$a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Unicité (à rédiger avec les élèves, démonstration très formatrice.)

✂----------

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de :

a) 121 par 7.
b) Avec votre machine, effectuer la division euclidienne de 273 par 15.
c) En déduire, sans utiliser la machine, le quotient et le reste de la division euclidienne de -233 par 15.
d) Déterminer, en fonction des valeurs de l'entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de $5n + 3$ par $2n + 1$.

✂----------

Exercice 14

1) Expliquer pourquoi, tout entier naturel n impair peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $n = 2p + 1$ avec p entier.

2) Matt est un original, il écrit toujours que si n est un entier impair, alors $n = 2k - 1$ avec k entier. Expliquer pourquoi Matt écrit juste.

✂----------

Propriété importante pour la suite du cours

Soit a un entier relatif, et b un entier naturel non nul.

a est divisible par b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Preuve : Evidente !

✂----------

Exercice 15

1) Factoriser au mieux : $n^3 - 16n$ où n désigne un entier naturel.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - 16n$ est un multiple de 3.

✂----------

V– Congruences dans ℤ

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux entiers relatifs.

On dit que *a et b sont congrus modulo n* lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On adopte la notation suivante : $a \equiv b\,[n]$ que l'on lit : « *a* **est congru à** *b* **modulo** *n* », on note aussi $a \equiv b\ (n)$ ou encore $a \equiv b \mod n$.

Attention au symbole de congruence $\equiv$ *: il n'a rien à voir avec le signe = usuel !!!*

Exemples

15 et 22 sont congrus modulo 7.

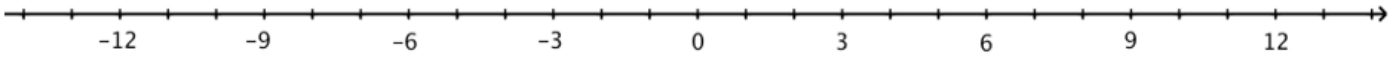
Citer deux entiers congrus modulos 4.

Expliquer pourquoi $212 \equiv 335\ [3]$.

Remarque : De-par la définition, $a \equiv b\ [n]$ revient à dire que $b \equiv a\ [n]$. On dit que la relation de congruence modulo n est symétrique.

Exemple bis

Sur la droite graduée ci-dessous, on a représenté quelques multiples de 3 (points noirs) :



Construire au stylo verts les entiers de cette droite congrus à 1 modulo 3, et en rouge les entiers congrus à 2 modulo 3.

Nous allons voir une propriété importante qui rend plus "maniable" la notion d'entiers congrus modulo n.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux entiers relatifs.

$a \equiv b\ [n]$ si et seulement si on a : n divise $a - b$ ou encore $a - b$ est un multiple de n.

Ainsi, $a \equiv b\ [n]$ si et seulement si il existe un entier k tel que : **.....**

Preuve :

✂----------

Exemples

Est-il vrai que $2023 \equiv 8\ [10]$?

Donner l'expression générale des nombres congrus à 4 modulo 11.

♥♥x est un entier. Que signifie le fait que : $x \equiv 0\ [2]$? Que signifie que $x \equiv 1\ [2]$? ♥♥

✂----------

Propriétés triviales de la relation de congruence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout entier relatif a, $a \equiv a\ [n]$.

♥♥- $a \equiv 0\ [n]$ si et seulement si .....♥♥

- Pour tout entier relatif a, $a \equiv r\ [n]$, où r désigne le reste dans la division euclidienne de a par n.

- ***Transitivité de la relation de congruence*** :

Pour tous entiers a, b et c, si $a \equiv b\ [n]$ et si $b \equiv c\ [n]$, alors .....

Preuve :

Exemples

$31 \equiv 4\ [27]$ et $4 \equiv 301\ [27]$, donc $301 \equiv 31\ [27]$.

Exercice 16

1) Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant :

Si $a \equiv b\,[n]$, alors le reste dans la division euclidienne de a par n est b.

2) A quoi est congru modulo 10 tout entier naturel ?

Exemple : $2023 \equiv \cdots [10]$.

✂----------

Nous allons voir à présent des propriétés et l'utilité et l'efficacité des congruences.

♥♥ ***Propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec les opérations usuelles*** ♥♥

Soient a, b, c et d des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

i) ♥♥ Si $a \equiv b\ [n]$ et si $c \equiv d\ [n]$, alors ……♥♥ : On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition.

Remarque : on a aussi : ♥♥ ……♥♥, donc la relation de congruence est compatible avec la soustraction, ce qui n'a rien de surprenant, vu que toute soustraction n'est autre qu'une addition particulière.

ii) ♥♥ Si $a \equiv b\ [n]$ et si $c \equiv d\ [n]$, alors ……♥♥ : On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication.

iii) ♥♥ Pour tout entier naturel k non nul, si $a \equiv b\ [n]$ alors……♥♥ : On dira que la relation de congruence est compatible avec les puissances.

Preuve :

✂----------

Remarque : *attention, la réciproque de chacune des affirmations suivantes est fausse ! Vous devez vous en convaincre à l'aide de contrexemples faciles à fabriquer.*

De i), on déduit que ***si $a \equiv b\ [n]$, alors, pour tout entier relatif c, $a+c \equiv b+c\ [n]$.*** *Pourquoi ?*

De ii), on déduit que ***si $a \equiv b\ [n]$, alors, pour tout entier relatif c, $ac \equiv bc\ [n]$.*** *Pourquoi ?*

Attention, même si ces règles sont similaires à celles sur les égalités, rappelons que la relation de congruence et l'égalité sont deux notions bien distinctes !

Si $ac \equiv bc\ [n]$, il est en général faux de dire que $a \equiv b\ [n]$, c'est-à-dire qu'on on ne simplifie pas par c (même si c est non nul) une congruence ! Encore un point qui diffère par rapport aux égalités.

Exemple : $6\times 3\equiv 6\times 1$ [12], *mais* 3 *n'est pas congru à* 1 *modulo* 12 !

Application phare des congruences : preuve des critères de divisibilités usuels du système décimal.

Définition

Soit N un entier naturel. Notons $a_0, a_1,\ldots\ldots,a_n$ les chiffres respectifs des unités, dizaines, centaines…..de son écriture décimale. [$a_0,\ldots\ldots,a_n$ sont donc des entiers compris entre 0 et 9].

On a donc : $N = a_0\times 10^0+a_1\times 10^1 + a_2\times 10^2 + \ldots\ldots+a_n\times 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\times 10^k$.

On notera parfois : $N = \overline{a_n a_{n-1}\ldots\ldots a_1 a_0}$ (La barre est pour éviter la confusion avec l'écriture du produit des chiffres constituant N dans l'écriture d'un entier en base 10).

Par exemple : soit $N = 213$. On a : $N = 2\times 10^2 +1\times 10^1 +3\times 10^0$.

Décomposer de la même façon : 3258 :

♥♥***Critères de divisibilité usuels du système décimal***♥♥

- ✓ *Un entier naturel N est divisible par 2 (N est pair) si et seulement si son chiffre des unités est lui-même pair.*
- ✓ *Un entier naturel N est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités vaut 0 ou 5.*
- ✓ *Un entier N est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres de N est un multiple de 3.*
- ✓ *Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de N est un multiple de 9.*
- ✓ *Un entier N est divisible par 11 si et seulement si, avec les notations de la définition,* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times a_k$ est un multiple de 11, ce qui revient à dire que la somme des chiffres de N de rang pair à laquelle on soustrait la somme des chiffres de N de rang impair est un multiple de 11.

Preuve :

✂----------

Exemple

Etablir que 201520142013 n'est pas un multiple de 11, puis que $A = 201520142013^{2016} - 4018^{2016}$ est un multiple de 11.

Pour votre culture, il existe des critères de divisibilité par k, pour tout entier $k > 1$. Cependant, ils sont peu simples d'utilisation, voilà pourquoi on ne vous demande pas de les retenir.

VI Farandole d'applications des congruences à la résolution de problèmes divers et variés.

Exercice 0

1) Quelle heure sera-t-il 213 heures après 14 heures ?
2) Quand on joue à la belote par exemple, au bout de quelques manches, on ne sait en général plus à qui revient la charge de distribuer les cartes….

Matt, Maeva, Matthieu et Mathilde distribuent à tour de rôle, dans cet ordre, les cartes.

Matt a commencé à donner les cartes lors la première manche. Qui devra distribuer les cartes à la $1327^{ième}$ manche (en supposant que les joueurs aient une très forte addiction au jeu de belote) ?

✂----------

Exercice 1

a) Donner le chiffre auquel est congru, modulo 10, chacun des entiers suivants :

2023 ; 2023^2 ; 2023^3 ; 2023^4. Pour les puissances suivantes 2023^5 ; 2023^6 …. que peut-on prévoir ?

b) En déduire quel est le chiffre des unités de l'entier 2023^{2024}.

✂----------

Exercice 2

1) A l'aide d'un tableau de congruences, montrer que le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
2) Soit n un entier naturel. Démontrer que si n n'est pas divisible par 5, alors $(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 5.

✂----------

Exercice 3

n est un entier naturel. Conjecturer une propriété commune aux entiers de la forme : $3 \times 2^{4n+2} - 7$. Prouver que cette dernière est vraie pour tout entier naturel n.

✂----------

Exercice 4

Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

✂----------

Exercice 5

1) En utilisant un tableau de congruences, établir que le carré d'un entier naturel est congru à 0, 1 ou 4 *modulo* 8.

2) Soit n un entier naturel tel que $n \equiv 7$ [8]. Etablir que n ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

✂----------

Exercice 6

a) Soit n un entier. Déterminer les deux chiffres, les plus petits possibles, auxquels n^2 est congru modulo 4.

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $5\sqrt{7}$. Existe-t-il des points à coordonnées entières situés sur le cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 7

1) Déterminer tous les entiers x tels que : $x - 1 \equiv 11$ [5]. Idem avec : $2x \equiv 1$ [7].
2) Prouver l'équivalence suivante : $3x \equiv 4$ [7] $\Leftrightarrow x \equiv 6$ [7].

✂----------

Exercice sublime

Soit N un entier écrit en base 10. On appelle $p(N)$ un permuté de N, c'est-à-dire un nombre entier écrit avec les mêmes chiffres que ceux de N, écrits dans un ordre arbitraire.

Démontrer que pour tout entier N, $N - p(N)$ est un multiple de 9.

✂----------

Exercice 8

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2)

a) En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3 ni par 5, ni par 11.