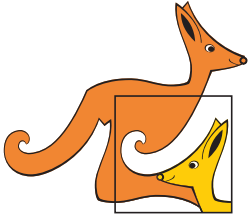


KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES



L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de six millions de participants dans le monde.

Jeu-concours 2014 — Durée : 50 minutes

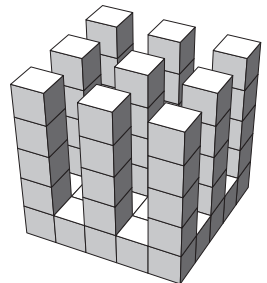
Sujet S

- L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites.**
 - **Il y a une seule bonne réponse par question.** Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
 - Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes depuis la première question jusqu'à la première réponse erronée).
- Les classements sont séparés pour les Première S, les Terminale S et pour les étudiants (Bac+).**

1 F est une fonction linéaire telle que $F(2) = 1342$. Combien vaut $F(3)$?
A) 2012 B) 2013 C) 2014 D) 2015 E) 2016

2 Aujourd'hui c'est l'anniversaire de Marta, Lucie et Sophia. La somme de leurs âges est 44. Quelle sera la somme de leurs âges la prochaine fois qu'elle sera à nouveau un nombre de deux chiffres identiques ?
A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99

3 Un cube est formé de $5 \times 5 \times 5$ cubes $1 \times 1 \times 1$. On enlève un certain nombre de ces petits cubes pour former un solide constitué de colonnes de même hauteur reposant sur le même socle (voir la figure). Combien de cubes $1 \times 1 \times 1$ a-t-on enlevés ?
A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 80



4 Combien vaut $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$?
A) 2^{2011} B) 2^{2012} C) 2^{2013} D) 1 E) 2

5 48 balles sont réparties entre trois corbeilles de couleurs différentes. Ensemble, la bleue et la rouge contiennent le double des balles contenues dans la blanche. La bleue contient la moitié des balles contenues dans la blanche. Quel est le nombre de balles dans la corbeille rouge ?
A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

6 Une année ayant tous ses chiffres différents et son dernier chiffre strictement plus grand que la somme des autres, comme 2014, est appelée *mégapyge*. Combien d'années séparent 2014 de la précédente année *mégapyge* ?
A) 5 B) 215 C) 305 D) 395 E) 485

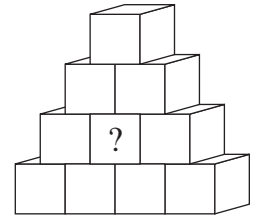
7 Dans laquelle de ces expressions ne peut-on pas mettre $(b+1)$ en facteur ?

- A) $2b+2$ B) b^2-1 C) b^2+b D) $-1-b$ E) b^2+1

8 François a construit la pyramide ci-contre en utilisant 4 cubes rouges, 3 cubes bleus, 2 cubes verts et un jaune.

Sachant que deux cubes d'une même couleur ne se touchent pas, de quelle couleur est le cube placé au milieu ?

- A) rouge B) bleu C) vert
D) jaune E) plusieurs couleurs sont possibles



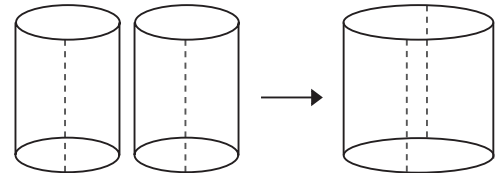
9 Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale du produit $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$?

- A) 22 B) 55 C) 77 D) 110 E) 111

10 Deux cylindres identiques sont coupés suivant la ligne en pointillé et sont collés ensemble pour former un unique cylindre plus grand (voir figure).

Quel est le rapport du volume du grand cylindre au volume d'un des cylindres initiaux ?

- A) 2 B) 3 C) π D) 4 E) 8



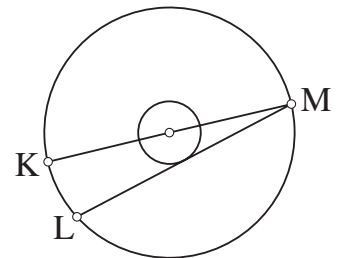
11 Une boîte rectangulaire a pour dimensions $a \times b \times c$ avec $a < b < c$. Si l'on augmente a ou b ou c d'une quantité donnée strictement positive, le volume augmente. Pour lequel des cas suivants, l'augmentation de volume est-elle la plus grande ?

- A) on augmente a B) on augmente b C) on augmente c
D) l'augmentation est la même que l'on augmente a ou b ou c
E) cela dépend des valeurs de a , b et c

12 Les rayons des deux cercles concentriques de la figure sont dans le rapport 3. $[KM]$ est un diamètre du grand cercle. $[LM]$ est une corde du grand cercle qui est tangente au petit cercle.

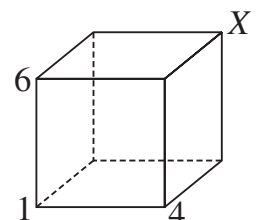
Si $KL = 12$, quel est le rayon du grand cercle ?

- A) 13 B) 18 C) 21
D) 24 E) 26



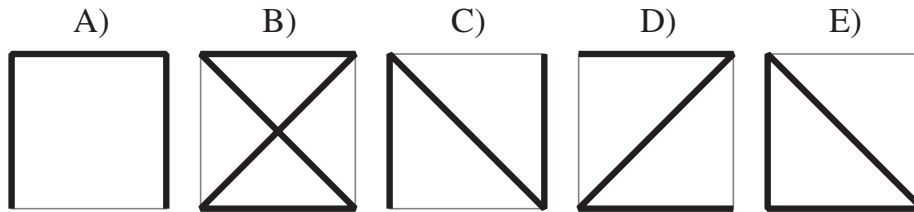
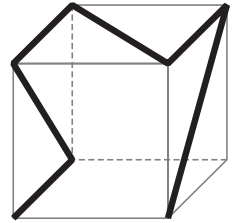
13 Les sommets d'un cube sont numérotés par les entiers de 1 à 8 de sorte qu'en additionnant les entiers des quatre sommets de toute face du cube, on obtienne toujours le même résultat. 1, 4 et 6 étant placés comme sur la figure, quel est l'entier figurant sur le sommet X ?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8



- 14** Six semaines durent $n!$ secondes ; quelle est la valeur de n ?
 [Rappel : $n!$ est le produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n .]
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

- 15** Un fin ruban de couleur est collé sur un cube transparent, comme sur la figure ci-contre.
 Lequel des dessins ci-dessous ne peut pas être une vue de ce cube ?



- 16** Parmi dix entiers strictement positifs et différents, exactement 5 d'entre eux sont divisibles par 5 et exactement 7 d'entre eux sont divisibles par 7. Quelle est la valeur minimum du plus grand de ces dix entiers ?
 A) 105 B) 77 C) 75 D) 63 E) un autre nombre

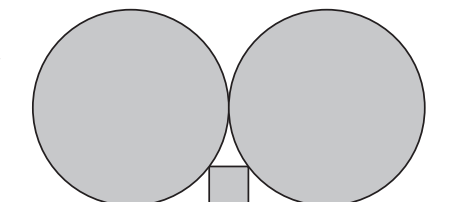
- 17** Un fromage est composé d'eau et de « matière sèche » dont une partie est « grasse ». Voici les informations données sur un fromage : « pourcentage total de matière grasse : 24 %, pourcentage de matière grasse sur matière sèche : 75 % ». Quel est le pourcentage d'eau dans ce fromage ?
 A) 72 % B) 68 % C) 60 % D) 51 % E) 32 %

- 18** La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = ax + b$ est croissante et vérifie les deux égalités :
 $f(f(1)) = 21$ et $f(f(0)) = 5$.
 Quelle est la valeur de a ?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

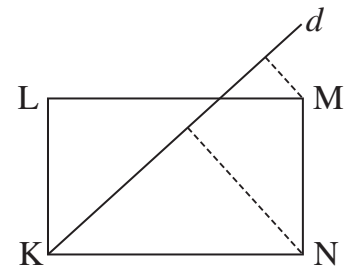
- 19** Combien de triplets d'entiers $(m ; n ; p)$ vérifient $1 < p < n < m$ et $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$?
 A) aucun B) 1 C) 2 D) 3 E) une infinité

- 20** Parmi les entiers de 1 à 100, Tom en choisit de sorte que leur produit ne soit pas divisible par 54. Combien, au plus, peut-il en choisir ?
 A) 52 B) 53 C) 68 D) 69 E) 90

- 21** Deux disques de rayon 1 sont tangents entre eux et tous les deux tangents à une même droite. Un carré rentre exactement entre cette droite et les deux disques qu'il touche (voir la figure).
 Quelle est la longueur du côté de ce carré ?
 A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$



- 22** (u_n) est la suite définie par $u_4 = 6$ et, pour tout entier $n \geq 4$, $n u_n = (n-3) u_{n+1}$.
Quelle est la valeur de $u_4 \times u_7 \times u_{10} \times \dots \times u_{2011} \times u_{2014}$ (produit des u_n de 3 en 3 de u_4 à u_{2014}) ?
A) 2013 B) 2014 C) 2013×2014 D) $2013!$ E) $2014!$
- 23** Neuf kangourous sont exceptionnels : ce sont les seuls à être argentés ou dorés. Lorsque trois de ces kangourous se rencontrent par hasard, il y a deux chances sur trois qu'aucun ne soit argenté. Combien de kangourous exceptionnels sont dorés ?
A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8
- 24** La droite d passe par le sommet K du rectangle KLMN et les distances à d de M et de N sont respectivement 2 et 6.
Si KN est le double de KL, combien vaut KN ?
A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) $4\sqrt{3}$



Pour départager d'éventuels premiers ex æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

- 25** 3 chèvres, 9 loups et 2 lions se retrouvent seuls sur une île. Les loups peuvent manger des chèvres et les lions peuvent manger des chèvres et des loups. Mais cette île est magique car si un loup mange une chèvre, il se transforme en lion ; si un lion mange une chèvre, il se transforme en loup et, s'il mange un loup, il se transforme en chèvre. Quel est le plus grand nombre possible d'animaux restant sur cette île une fois l'équilibre atteint (aucun animal ne peut alors en manger un autre) ?
- 26** Combien de triplets $(k ; m ; n)$ d'entiers strictement positifs vérifient les égalités :

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1 ?$$

© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 4 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé.
« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »



Kangourou des mathématiques, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet

<http://www.mathkang.org/catalogue/>

Des livres pour faire, comprendre et aimer les mathématiques



www.mathkang.org