CORRECTION DU BAC BLANC DE MATHS _ mardi 13 février 2024

EXERCICE 1 :

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$.
   $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$.
   Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$
   La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$ à valeurs dans $[-68\,;\,37]$. Or $0 \in [-68\,;\,37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0{,}2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

- **PARTIE B :**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x^2) = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Interprétation : l'axe des abscisses est asymptote horizontale pour C_f en $-\infty$.

b) Soit x un réel non nul.

$$f(x) = \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x^2-2x+1)e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$$

d) Pour tout réel x, $(1+x^2)^2 > 0$ et $e^x > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(x-1)^2$.
$(x-1)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) On résout sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ car pour tout réel x, $(1+x^2)^2 \neq 0$ et $e^x \neq 0$
et $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Donc C_f admet une seule tangente horizontale en x = 1.

- **PARTIE C :**

a)

Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b)

$\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 2 :

Question 1 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-2\\1-5\\-2-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$. On calcule alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans chacun des cas proposés et on vérifie si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. La réponse exacte est la réponse **b)** $D(3\,;3\,;1)$. En effet dans ce cas $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires donc A, B et D sont alignés. Dans les trois autres cas les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas proportionnelles.

Remarque : on pouvait aussi constater que $D(3\,;3\,;1)$ *est le milieu du segment [AB].*

Question 2 :

On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. On pose $E(x_E\,;\,y_E\,;\,z_E)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-6\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-16\\-2\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-5\\z_E-4\end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases}x_E-2=12\\y_E-5=-16\\z_E-4=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_E=14\\y_E=-11\\z_E=2\end{cases}$

Ainsi la réponse exacte est la réponse **c)** $E(14\,;-11\,;2)$.

Question 3 :

On remplace *x*, y et z dans la représentation paramétrique de d par les coordonnées du point en question. Ce point appartient à la droite d si, et seulement si, le système de trois équations à une inconnue admet une solution.

Pour la réponse a) $M_1(5\,;39\,;2)$:

$\begin{cases}5=-3+2t\\39=15+6t \quad \text{où } t\in\mathbb{R}\\2=19-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8=2t\\24=6t \quad \text{où } t\in\mathbb{R}\\-17=-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4=t\\4=t\\4{,}25=t\end{cases}$ donc ce système d'équations n'admet pas de solution ainsi le point $M_1(5\,;39\,;2)$ n'appartient pas à la droite d.

On prouve de la même façon que les points $M_2(0\,;2\,;8)$ et $M_3(-2\,;16\,;17)$ n'appartiennent pas à d.

Pour la réponse d) $M_4(7\,;45\,;-1)$

$\begin{cases}7=-3+2t\\45=15+6t \quad \text{où } t\in\mathbb{R}\\-1=19-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10=2t\\30=6t \quad \text{où } t\in\mathbb{R}\\-20=-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5=t\\5=t\\5=t\end{cases}$ donc 5 est la solution de ce système d'équations ainsi le point $M_4(7\,;45\,;-1)$ appartient à la droite d. La réponse exacte est la réponse **d)** $M_4(7\,;45\,;-1)$.

Question 4 :

Grâce à la représentation paramétrique de la droite d, on sait que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. On cherche alors dans la liste proposée un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

La réponse exacte est donc **c**) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$. En effet, on a alors $\vec{v} = 2\,\vec{u}$.

Question 5 :

A(2 ; 5 ; 4) ; B(4 ; 1 ; –2) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$. Pour déterminer une représentation paramétrique de (AB), on peut utiliser un point de la droite : A ou B et un vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB}$ ou un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

La réponse exacte est la réponse **b**) $\begin{cases} x = 4 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = -2 + 3t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$. En effet, le point de coordonnées (4 ; 1 ; –2) est le point B et le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est bien colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = -2\,\vec{w}$.

On pouvait aussi vérifier dans chacun des cas si les points A et B appartenaient à la droite proposée.

Question 6 :

On commence par vérifier si les droites (AB) et d sont parallèles en utilisant leur vecteur directeur.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et d ne sont pas parallèles.
On exclut donc les réponses b) et c).

On recherche alors les coordonnées d'un éventuel point d'intersection de ces deux droites en utilisant les représentations paramétriques des deux droites et en résolvant le système :

$$\begin{cases} -3 + 2t = 4 - t' \\ 15 + 6t = 1 + 2t' \\ 19 - 4t = -2 + 3t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Or $\begin{cases} -3 + 2t = 4 - t' \\ 15 + 6t = 1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 7 - 2t \\ 15 + 6t = 1 + 2(7 - 2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 7 - 2t \\ 15 + 6t = 15 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 7 - 2t \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 7 \\ t = 0 \end{cases}$

De plus, pour $t' = 7$ et $t = 0$, $19 - 4t = 19$ et $-2 + 3t' = 19$ d'où $19 - 4t = -2 + 3t'$.

Ainsi le couple (t , t') = (0 ; 7) est la solution du système $\begin{cases} -3 + 2t = 4 - t' \\ 15 + 6t = 1 + 2t' \\ 19 - 4t = -2 + 3t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$

Ainsi les droites (AB) et d sont sécantes et leur point d'intersection est le point de coordonnées (–3 ; 15 ; 19).
La réponse exacte est donc **a**) sécantes.

Question 7 :

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^{2x} + 2\,e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2\,e^x \times e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

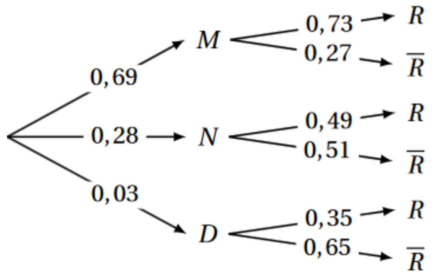
Or pour tout réel *x* non nul, $e^{2x} \neq 1$ donc **l'affirmation 1 est fausse**.

Question 8 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$ donc $g(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 3)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$.
Soit Δ le discriminant de l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 > 0$ donc cette équation admet exactement deux solutions réelles distinctes.
Ainsi l'équation g(*x*) = 0 admet exactement deux solutions réelles distinctes donc la courbe représentative de la fonction g coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.
L'affirmation 2 est donc vraie.

EXERCICE 3 :

- **PARTIE A :**



1)

2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

$P(D\cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0{,}69 \times 0{,}27 = 0{,}1863$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

$P(R) = P(R\cap M)+P(R\cap N)+P(R\cap D) = 0{,}69\times 0{,}73+0{,}28\times 0{,}49+0{,}03\times 0{,}35 = 0{,}6514$

On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

$P_R(N) = \dfrac{P(R\cap N)}{P(R)} = \dfrac{0{,}28\times 0{,}49}{0{,}6514} = \dfrac{686}{3257} \approx 0{,}2106$ au dix-millième près.

- **PARTIE B :**

1. a)

On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement R, de probabilité $p = 0{,}6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

C'est donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}6514)$ que suit X.

b) $E(X) = 20 \times 0{,}6514 = 13{,}028$

<u>Interprétation</u> : sur un très grand nombre de lots de 20 déchets, on aura en moyenne 13,028 déchets recyclables par lot.

c)

On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

$P(X=14) = \binom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \binom{20}{14} 0{,}6514^{14} \times 0{,}3486^{6} \approx 0{,}1723$ au dix-millième près.

d) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0{,}9483$

2.

a)

On a $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0{,}3486^n$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0{,}3486^n$

b) Avec 8 déchets : $1 - p_8 \approx 0{,}99978$ Avec 9 déchets : $1 - p_9 \approx 0{,}999924$

Donc à partir de 9 déchets.

EXERCICE 4 :

1. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geqslant 0$. Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.

$T_n \geqslant 20 \iff 0,955 \times T_n \geqslant 0,955 \times 20 \iff 0,955 T_n \geqslant 19,1$

$\iff 0,955 T_n + 0,9 \geqslant 19,1 + 0,9 \iff 0,955 T_n + 0,9 \geqslant 20$. Donc $T_{n+1} \geqslant 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = 0,955\ T_n + 0,9 - T_n = -0,045\ T_n + 0,9 = -0,045\left(T_n - \dfrac{0,9}{0,045}\right)$

$= -0,045(T_n - 20)$.

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

c. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20$.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955\ T_n - 19,1 = 0,955\left(T_n - \dfrac{19,1}{0,955}\right)$

$= 0,955(T_n - 20) = 0,955\ u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,955 u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20$.

3. **a.** Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.

temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C