# 1 Fonctions sin, cos et tan

**1**
1) Que vaut $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ? En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

---

**2** Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ : 1) $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3) $|\tan x| \leqslant 1$.

---

**3** Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ :

$$\left|\sin(nx)\right| \leqslant n\,|\sin x|.$$

---

**4** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ :
1) $\sin x+\sin(2x)=0$. 2) $\tan(2x)=3\tan x$.
3) $2\sin x+\sin(3x)=0$. 4) $3\tan x=2\cos x$.
5) $\cos x=1+\sqrt{3}\sin x$.
6) $\sin x+\cos x=1+\tan x$.
7) $\sin x+2\cos(4x)=\sqrt{3}\cos x$.

---

**5** Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

**6** Montrer que pour tout $n\geqslant 2$ :

$$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} \qquad (n-1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

---

**7** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x\longmapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right)$.

---

**8** Étudier chacune des fonctions suivantes :
1) $x\longmapsto\frac{\tan(2x)}{\tan x}$.
2) *** $x\longmapsto\sin(3x)+3\sin x$.

*** On pourra utiliser la relation : $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, vraie pour tous $p,q\in\mathbb{R}$ et sur laquelle nous reviendrons au chapitre « Nombres complexes ».

---

**9**
1) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ : $\tan x>x$.
2) Montrer que la fonction $x\longmapsto\frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

---

**10** On veut montrer que pour tout $x\in[0,\pi]$ :

$$\sin x\geqslant x-\frac{x^2}{\pi}.$$

1) Montrer le résultat sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2) En déduire sans nouvelle étude de fonction que le résultat vaut sur $[0,\pi]$.

---

**11** Soient $s,c\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On fait quatre hypothèses :

$$s'=c,\qquad c'=-s,\qquad s(0)=0\qquad\text{et}\qquad c(0)=1.$$

1) On fixe $x,y\in\mathbb{R}$. Grâce à la fonction :

$$t\longmapsto s(t+x)c(t+y)-c(t+x)s(t+y),$$

montrer que : $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$.
2) En déduire que $s$ est impaire et $c$ paire.
3) En déduire que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ :

$$c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y).$$

4) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$s(x)^2+c(x)^2=1.$$

---

**12** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que : $f''+f\geqslant 0$. Montrer, grâce à la fonction $t\longmapsto f'(t)\sin(t-x)-f(t)\cos(t-x)$, que pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

---

**13**
1) Étudier la fonction $x\longmapsto\cos^3x+\sin^3x$.
2) Résoudre l'équation : $\cos^3x+\sin^3x=1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

---

**14**
1) a) Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

b) Que vaut : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ?
c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x},$$

limite qu'on note aussi : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}$.