IV – Exercices de synthèse sur ce chapitre

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin^2(x) + \sqrt{3}cos(x)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1*a*) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

1*b*) Montrer que 2π est une période de f.

2) On se limite donc à l'étude de f sur $I = [0 ; \pi]$. Pourquoi ?

a) Vérifier que pour tout réel x appartenant à I, on a : $f'(x) = sin(x)(2cos(x) - \sqrt{3})$.

b) Etudier <u>SOIGNEUSEMENT</u> les variations de f sur I, et dresser le tableau de variation de f sur I.

c) Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère.

d) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A situé sur $\mathcal{C}$ et dont l'abscisse vaut $\frac{\pi}{2}$.

e) Démontrer que pour tout réel x vérifiant : $\frac{-\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, on a : $1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75$.

3) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α, avec $\alpha \in [2 ; 2{,}1]$.

Exercice II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$: f est appelée fonction tangente.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.

b) Etablir que f est impaire sur D_f et qu'elle est périodique de période π sur D_f.

c) En déduire sur quel intervalle I, on va étudier f.

d) Calculer, pour tout réel x appartenant à I, $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur I.

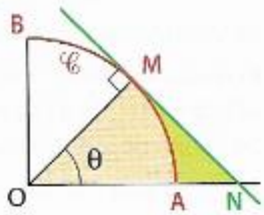
e) Montrer que O, origine du repère, est situé sur la courbe représentative de f, notée C_f, puis donner l'équation de la tangente, appelée (T) à C_f au point O. Etudier la position relative de (T) et de C_f sur I.

f) Déterminer $\lim\limits_{\begin{cases} x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2} \end{cases}} f(x)$. Conséquence graphique ?

g) Construire dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ C_f sur $]-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Exercice III

$\mathscr{C}$ est un quart de cercle de rayon 1 et M un point de $\mathscr{C}$. On note $\widehat{AOM} = \theta$ avec $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe (OA) en N.



Le but de cet exercice est de comparer les aires des domaines coloriés en orange et en vert. On note $f(\theta)$ l'aire du domaine orange et $g(\theta)$ l'aire du domaine vert.

1. Conjecturer avec GeoGebra

Construisez la figure. Créez le secteur circulaire OAM, le triangle OMN et l'angle θ.

Déplacez le point M sur l'arc $\widehat{AB}$ et comparez les deux aires pour conjecturer.

2. Démontrer

On note h la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta).$$

a) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right).$$

b) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}.$$

c) Étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

d) Démontrez qu'il existe un unique nombre α dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Encadrez α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1}.

e) Comparez alors les aires des deux domaines.

Exercice IV

On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

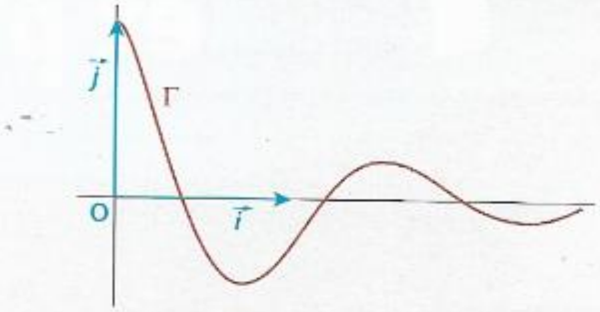
$$\sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Exercice V

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On a tracé la courbe Γ réprésentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$.



On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Démontrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) Quels sont les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et Γ ?

2. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) et étudiez sa convergence.

3. a) Démontrez que pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=-e^{-x}[\cos(4x)+4\sin(4x)].$$

b) Déduisez-en que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

4. Donnez une valeur approchée, à 10^{-1} près par excès, du coefficient directeur de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$. Complétez le graphique en traçant T et $\mathscr{C}$.

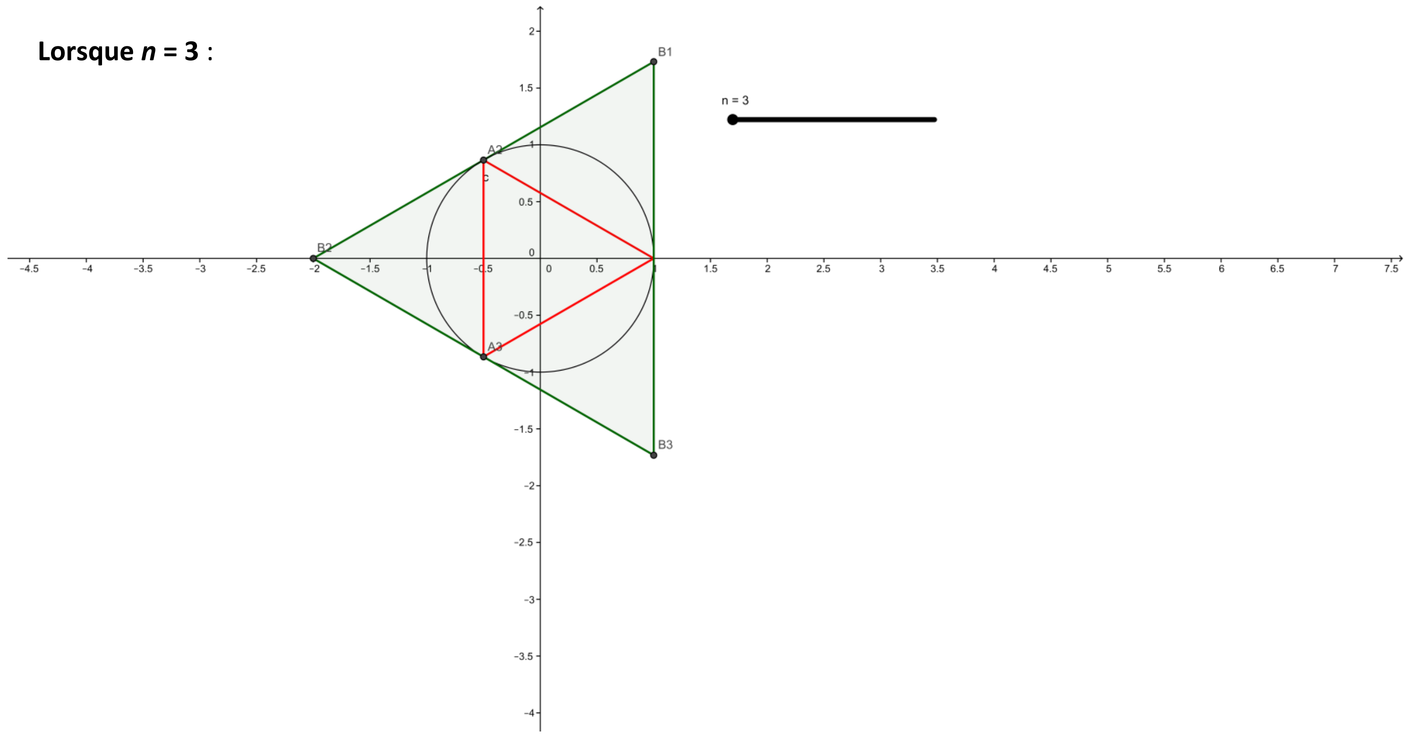
Exercice final : ***Who is*** π ***?*** (pour réfléchir un peu plus et où l'on démontre que le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π).

On considère le cercle trigonométrique de centre O, dans lequel on *inscrit* un polygone régulier à n côtés (avec n entier supérieur ou égal à 3) de centre O. On notera $A_1A_2......A_n$ ce polygone qu'on identifie donc à la liste de ses sommets.

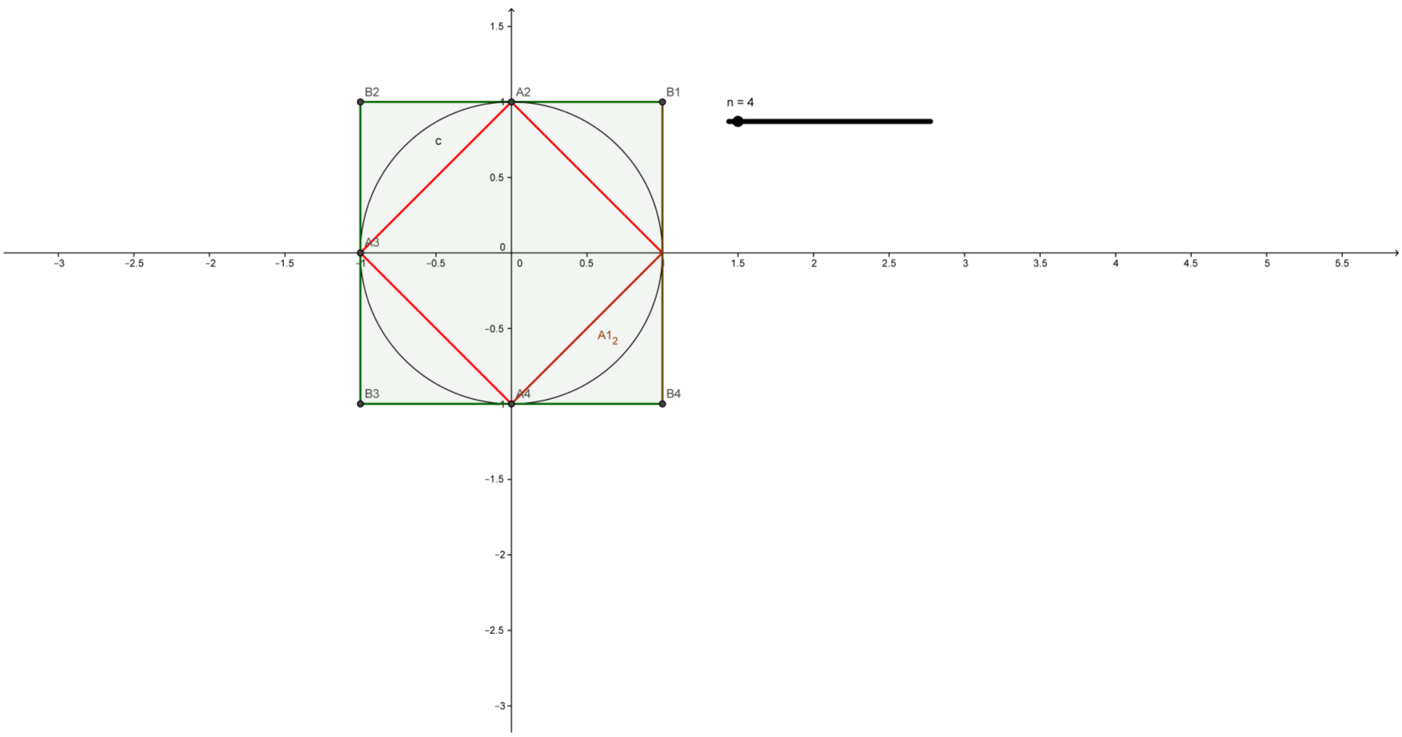
On considère le polygone régulier à n sommets *exinscrit* dans le cercle trigonométrique, noté $B_1B_2.....B_n$ où chacun des côtés de ce polygone est tangent au cercle trigonométrique en chacun des points A_i pour i compris entre 1 et n.

Voici une figure pour comprendre la situation :

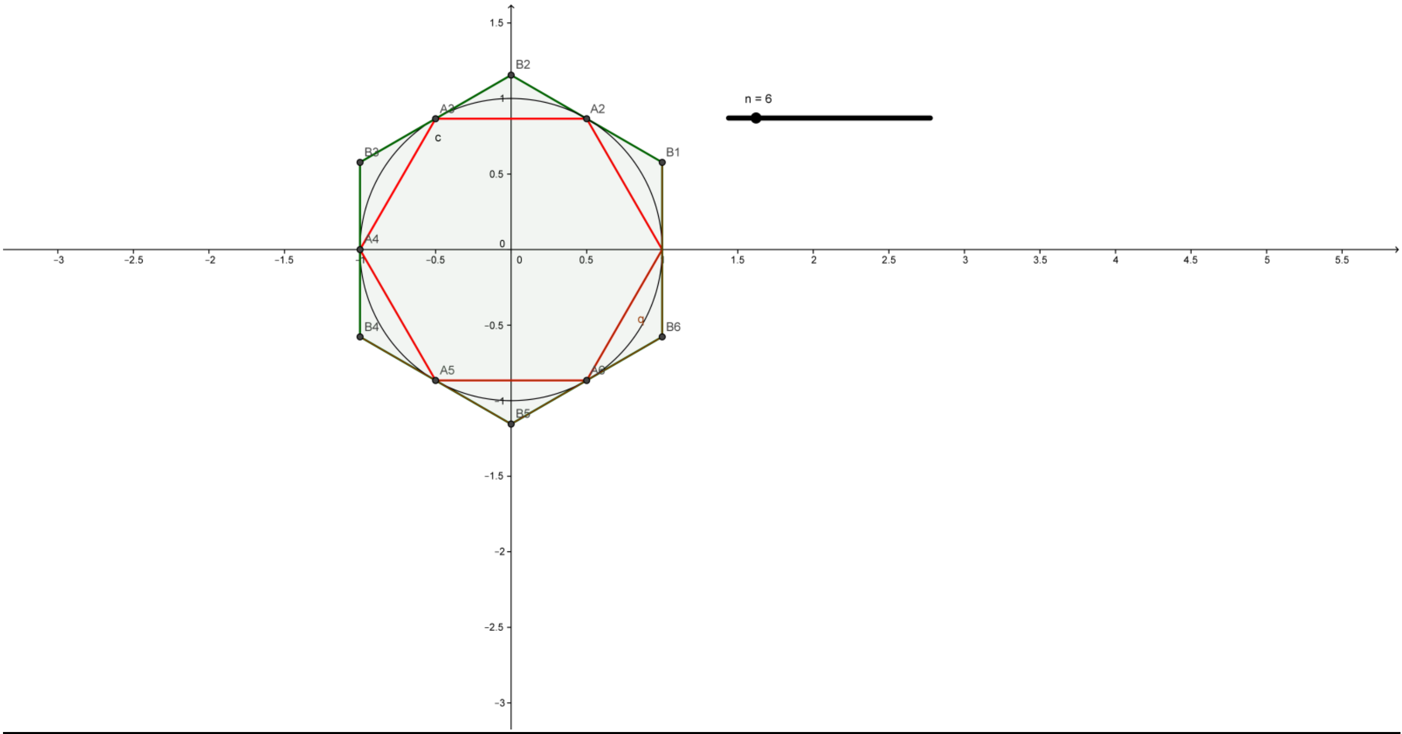
Lorsque *n* = 3 :



Lorsque *n* = 4 :



Lorsque *n* = 6 :



$1a$) Etablir avec soin que pour tout entier $n \geq 3$, le périmètre du polygone $A_1A_2......A_n$ que l'on notera u_n est donné par : $u_n = 2n \times sin(\frac{\pi}{n})$.

$1b$) Etablir que le périmètre du polygone $B_1B_2.....B_n$, noté v_n est donné par : $v_n = 2n \times tan(\frac{\pi}{n})$.

$2a$) Déterminer avec soin les limites des suites (u_n) et (v_n).

<u>Indication</u> : Vérifier que u_n s'écrit sous la forme : $u_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \times 2\pi$.

$2b$) En déduire le périmètre du cercle trigonométrique.

3) *On se propose de donner quelques approximations de* π.

a) Calculer les valeurs exactes de u_4 et v_4. En déduire une première approximation de π.

b) A l'aide des relations de *duplication*, ou d'un exercice fait en cours, calculer les valeurs exactes de $cos\,(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$, puis en déduire la valeur exacte de $tan(\frac{\pi}{8})$.

En déduire u_8 et v_8, puis une seconde approximation de π dont on donnera la précision en justifiant.

c) Pour $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, exprimer $cos(\frac{x}{2})$ en fonction de $cos(x)$, puis $sin(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$ *et* enfin $tan(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$.

d) Ecrire un algorithme qui, partant des valeurs exactes de $A = cos(\frac{\pi}{4})$ et $B = sin(\frac{\pi}{4})$, permet de calculer les valeurs exactes de $2^{p+2} \times sin(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ et $2^{p+2} \times tan(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ pour la valeur de l'entier p du choix de l'utilisateur. Quel est le rôle de cet algorithme ? Nécessite-t-il de connaître la valeur de π pour fonctionner ?

e) A l'aide de ce dernier, retrouver les valeurs de la question 3*b*), puis donner les valeurs approchées de $\frac{u_{130}}{2}$ et $\frac{v_{130}}{2}$ à 10^{-3} près. Quelle approximation de π obtient-on ? Et sa précision ?

f) A partir de quelle valeur de l'entier n peut-on considérer que $\frac{u_{2^n+2}}{2}$ et $\frac{v_{2^n+2}}{2}$ sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de π à 10^{-4} près ? Justifier votre démarche