Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies respectant scrupuleusement ces consignes auront un demi-point en plus 😊 !

Exercice I (3 points)

1) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Déterminer, par le calcul, à partir de quel rang, noté n_0, on a : $u_n \leqslant 10^{-3}$.

2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[0 \ ; \ +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 2e^{-3x})$.

3) Soit g la fonction définie sur $]0 \ ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$

Déterminer, en justifiant, la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice II (1,5 points)

Déterminer pour chacune des questions la bonne réponse que l'on recopiera sur sa copie :

1.

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\frac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3) + \frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}\ln(3)$

2.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 \ ; +\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0 \ ; +\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ **b.** $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ **d.** $f(2x) = 2f(x)$

3.

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty \ ; -2[\cup]1 \ ; +\infty[$ **b.** $S =]1 \ ; +\infty[$
c. $S = \emptyset$ **d.** $S =]-1 \ ; 1[$

Exercice III ***(8,5 points)***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.

c. Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geqslant x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

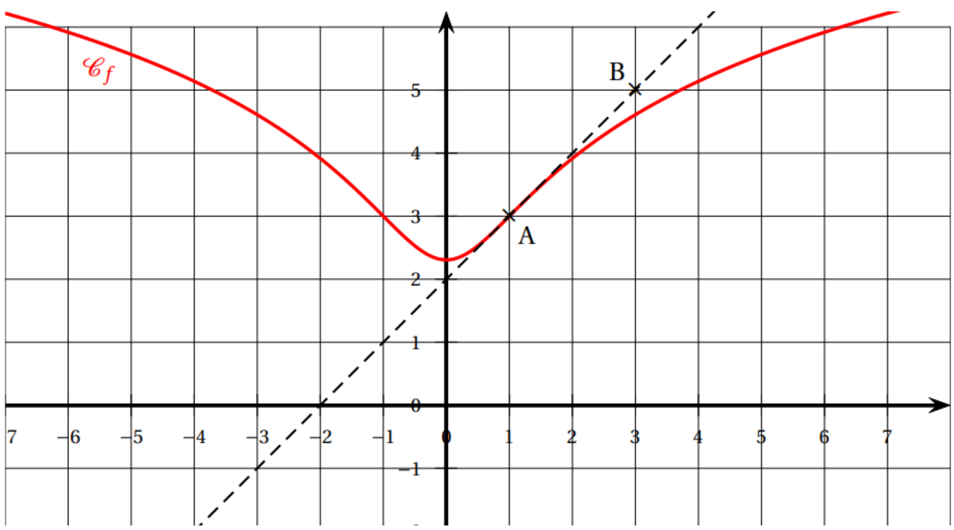
a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice IV ***(7 points)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   - **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   - **b.** Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. **Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$. Donner sans justification la limite de f en $-\infty$.**
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=3+\ln(2)$.
5. Déterminer le nombre de points d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$.