

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies respectant scrupuleusement ces consignes auront un demi-point en plus 😊 !

Exercice I (3 points)

1) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Déterminer, par le calcul, à partir de quel rang, noté n_0 , on a : $u_n \leq 10^{-3}$.

2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 2e^{-3x})$.

3) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2 \ln(x)-1}{x}$

Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice II (1,5 points)

Déterminer pour chacune des questions la bonne réponse que l'on recopiera sur sa copie :

1.

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \frac{1}{2} \ln(3)$

b. $\frac{1}{2} \ln(3)$

c. $3 \ln(3) + \frac{1}{2}$

d. $-\frac{1}{2} \ln(3)$

2.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(3x)$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$

c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$

d. $f(2x) = 2f(x)$

3.

L'ensemble S des solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $\ln(x+3) < 2 \ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

b. $S =]1 ; +\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =]-1 ; 1[$

Exercice III (8,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0 ; +\infty[$ et les limites.
- c. Justifier que pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f(x) \in]0 ; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

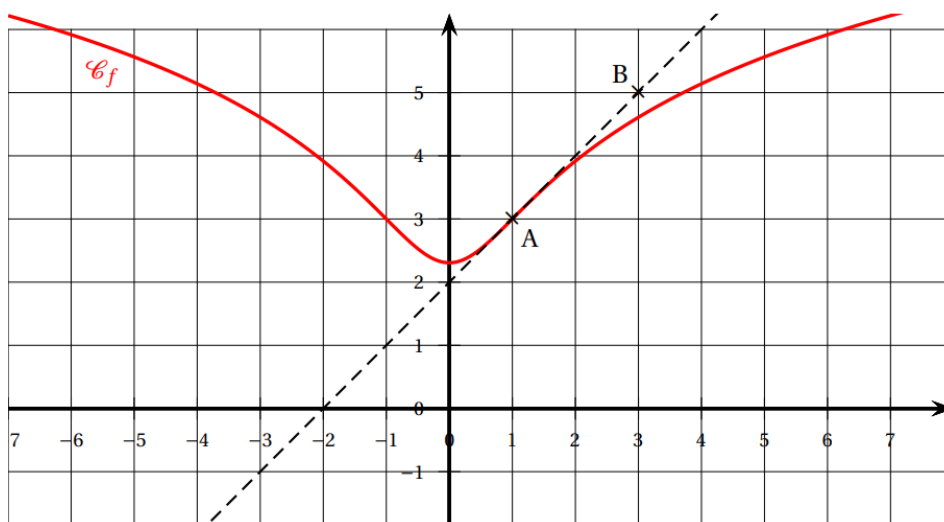
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice IV (7 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On considère les points $A(1 ; 3)$ et $B(3 ; 5)$. On donne ci-dessous \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe \mathcal{C}_f au point A .



Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$. Donner sans justification la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = 3 + \ln(2)$.
5. Déterminer le nombre de points d'inflexion de f sur \mathbb{R} .

