Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.

Exercice 0 (2 points)

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Déterminer, par le calcul, à partir de quel rang, noté n_0, on a : $u_n \leqslant 10^{-8}$.

Exercice I (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et que $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else :
            a=(a+b)/2
    return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

`>>> dichotomie(1)`

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

Exercice II **(5 *points*)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1.

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \dfrac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3) + \dfrac{1}{2}$ **d.** $-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ **b.** $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ **d.** $f(2x) = 2f(x)$

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.
b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.
c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.
d. aucune asymptote verticale .et aucune asymptote horizontale.

4.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right),$$

a. f est concave sur $\mathbb{R}$. ***b.*** f est convexe sur $\mathbb{R}$. ***c.*** f croit sur $\mathbb{R}$.

d. La courbe de f admet un unique point d'inflexion sur $\mathbb{R}$.

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0\,;\,+\infty[$.
Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

Exercice III **(8 *points*)**

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :
   $$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right).$$
   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).