Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Exercice I

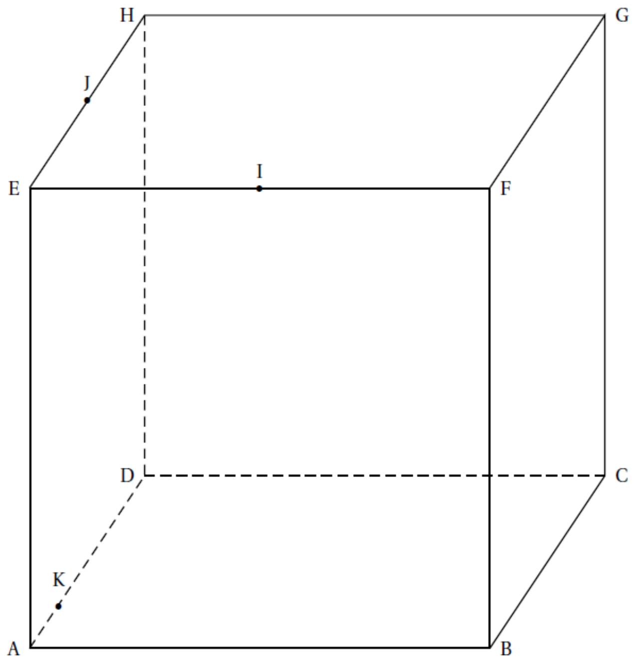
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

I est le milieu de du segment $[EF]$, et K le point du segment $[AD]$ tel que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$



1a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points F, H et K.

1b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).

1c) En déduire une équation cartésienne du plan (FHK).

1d) Soit $\mathscr{P}$ la plan passant par I et parallèle au plan (FHK). Etablir que $4x + 4y - 3z + 1 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

2) Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point L, projeté orthogonal du point E sur le plan $\mathscr{P}$.

$\rightarrow\rightarrow$

c) Déterminer la distance du point E au plan $\mathscr{P}$.

3) Considérons les points : $T(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{3})$, $U(1\ ;-1\ ;\ \dfrac{1}{3})$ et $V(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

a) Expliquer pourquoi le point T appartient au plan $\mathscr{P}$.

On admet (sans justification) que U et V appartiennent également au plan $\mathscr{P}$.

b) Vérifier que T, U et V ne sont pas alignés.

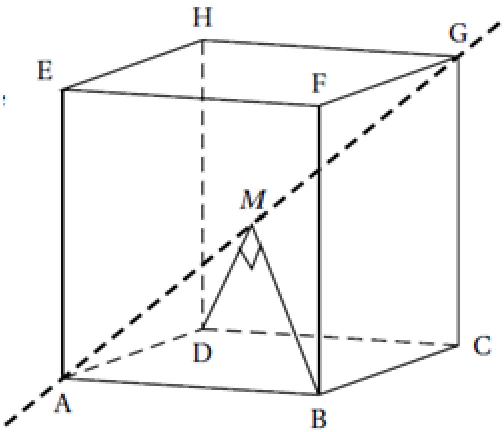
c) Démontrer que le triangle TUV est rectangle en T.

d) Calculer l'aire du triangle TUV.

e) Déterminer le volume du tétraèdre $ETUV$.

Partie B

$ABCDEFGH$ est un cube. L'espace est muni du repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.



Soit M un point appartenant à la droite (AG).

Déterminer, en justifiant votre réponse, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation : *"Il existe exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient perpendiculaires.*