Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.

Exercice I **(7 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

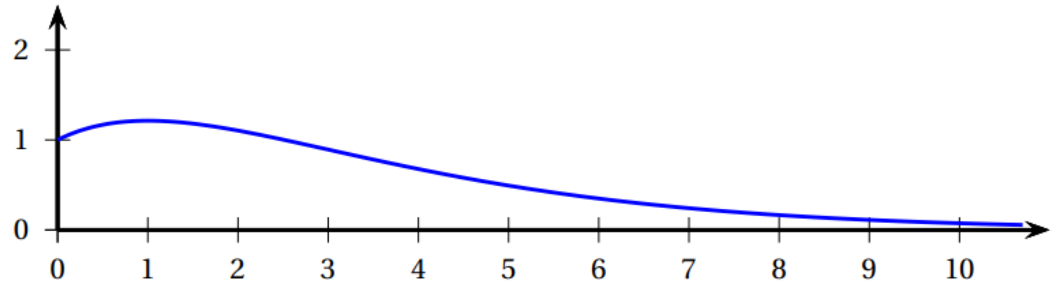
Exercice II **(6 *points*)**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif, $f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$,
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
4. Donner l'arrondi de α à l'unité.

5. Montrer que la courbe de f admet un unique point d'inflexion sur $[0\,;\,+\infty[$, dont on déterminera les coordonnées.

Exercice III **(7 points)**

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

a) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etablir que pour tout réel x, la dérivée seconde de f est égale à : $f''(x) = 2(1+2e^{-2x})$.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$ puis donner le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

d) Donner, sans justifier, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer avec soin que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.

f) Donner, en explicitant votre méthode, un encadrement de α à 10^{-2} près.

g) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

h) Etablir que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, puis prouver que ce minimum égal à $\alpha(\alpha + 1)$.

Partie B : Résolution d'un problème

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$.

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{OM}$

1) Faire un croquis de $\mathcal{C}$, puis établir que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est la fonction définie à la partie A.

2) Parmi tous les points situés sur $\mathcal{C}$, démontrer qu'il en existe un seul situé le plus proche possible de O. On notera A ce point dont on précisera les coordonnées, en valeur exacte.