Terminale Maths G2 ***Devoir surveillé numéro 6*** ***Mardi 13 Décembre 2022***

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies respectant scrupuleusement ces consignes auront un demi-point en plus 😊 !

Exercice I *(4,5 points)*

Partie A

Voici un QCM : Recopier sur votre copie, sans justifier, la bonne réponse pour chacune des questions :

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x = -2$; **b.** $y = -1$;

c. $y = -2$; **d.** $y = 0$

2) On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0\,.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

Partie B

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)e^{-x}$.

Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

2) g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = (x+1)e^{-2x}$.

a) Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $g(x) = -0{,}5\times(-2xe^{-2x}) + e^{-2x}$.

b) Donner, sans justifier, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X}$, puis déterminer, en justifiant, la limite de la fonction g en $+\infty$.

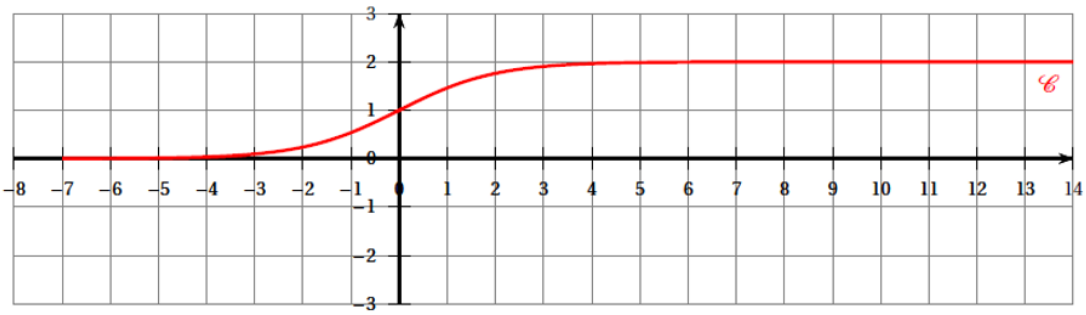
c) Interpréter graphiquement le résultat de la question *b)*.

Exercice II *(5 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en moins l'infini et interpréter graphiquement le résultat.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f, et vérifier que pour tout nombre réel x on a :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{e^x + 1}.$$

4. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point I(0; 1) et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur 0,5.

Exercice III ***(6 points)***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice IV ***(4,5 points)***

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + e^{2x}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etablir que pour tout réel x, la dérivée seconde de f est égale à : $f''(x) = 2(1+2e^{2x})$.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$ puis donner le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

d) Donner, sans justifier, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer <u>avec soin</u> que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.

f) Donner, en explicitant votre méthode, un encadrement de α à 10^{-2} près.

g) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

h) Etablir que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, puis prouver que ce minimum égal à $\alpha(\alpha - 1)$.

<u>La suite est hors-barème (1 point)</u>

<u>Partie B</u> : Résolution d'un problème

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{OM}$

1) Faire un dessin, puis établir que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est la fonction définie à la partie A.

2) Parmi tous les points situés sur $\mathcal{C}$, démontrer qu'il en existe un seul situé le plus proche possible de O. On notera A ce point dont on précisera les coordonnées, en valeur exacte.