Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus/malus pour la présentation de la copie.

Exercice I **(9 *points*)**

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux;

— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux;

— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;

— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;

— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux »;

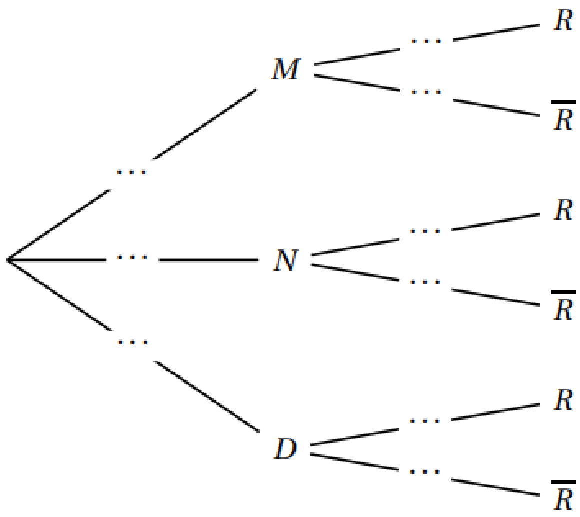
— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »;

— D : « Le déchet prélevé est dangereux »;

— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}651\,4$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.
b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. On arrondira au dix-millième près.
c. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins 10 déchets recyclables. On arrondira à 10^{-3} *près*.
d. Calculer l'espérance de X et interpréter cette dernière dans le cadre de l'exercice.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. En s'aidant de votre machine, déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice II **(7,5 *points*)**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

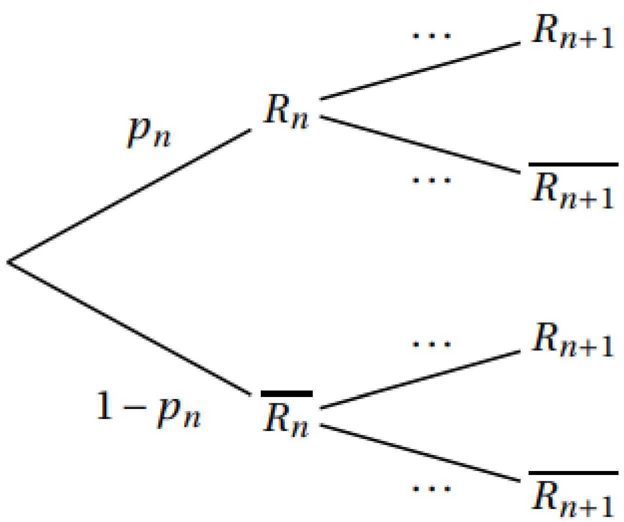
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- R_n l'événement : “l'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance ”.
- p_n est la probabilité de l'événement R_n.
- On a : $p_1 = 0{,}6$.

0) En effectuant un arbre modélisant les deux premières séances :

a) Montrer que la probabilité de franchir la haie le second jour est égale à 0,66.
b) Déterminer la valeur de probabilité de ne pas avoir franchi la haie le jour 1 sachant qu'il l'a franchie le jour 2. On arrondira au centième près.

1) Soit n un entier naturel non nul. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre pondéré suivant :



2) Justifier, en vous aidant de l'arbre, que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3$.

3) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par : $u_n = p_n - 0{,}75$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_1.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^{n-1}$.

c) En déduire que la suite (p_n) converge, préciser la valeur de sa limite, et interpréter cette dernière dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Apres de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près,

Exercice III **(3,5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse?

a. 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

2. La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à :

a. $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$
c. $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 %?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses?

a. $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1 - 0,04^n$ **d.** $1 - 0,96^n$

5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

a. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

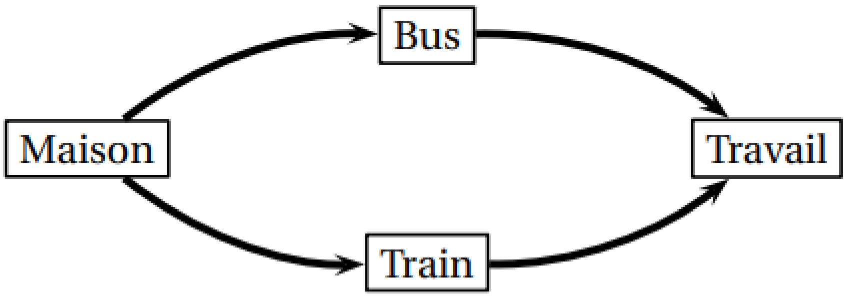
b. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

c. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

d. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

La situation suivante s'applique aux deux dernières questions et est indépendante des questions 1 à 5.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.

La probabilité que le train soit en panne est égale à t.

Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

6.

La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

7.

La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$