Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies respectant scrupuleusement ces consignes auront un demi-point en plus 😊 !

Exercice I *(10 points)*

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

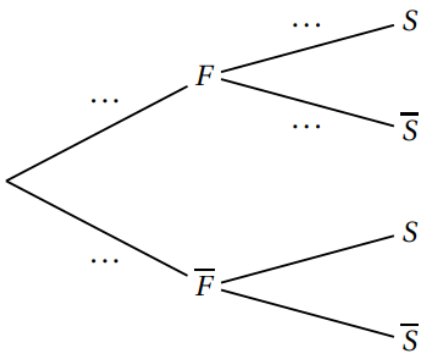
1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

a. Donner la probabilité de l'évènement S.
b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.
d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.



2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

e. Calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'au moins un salarié dans un échantillon de 20 ait suivi le stage.

f. Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'évènement E : " Au moins un des 20 employés a suivi le stage, et au moins un des 20 employés n'a pas suivi le stage ".

g. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter cette dernière dans le contexte de l'exercice.

Exercice II ***(10 points)***

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. **a.** Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.

Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

4. En détaillant votre démarche, et en utilisant votre calculatrice, déterminer le nombre n minimal de paires de verres que l'on doit prélever dans la production pour que la probabilité d'avoir au moins une paire de verres qui présente un défaut soit strictement supérieure à 0,99.