***Terminale Maths Groupe 3*** ***Devoir surveillé numéro 4*** **(≈ 85 *minutes*)** ***Vendredi 13 Novembre 2023***

***Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.***

***Exercice I*** **(12 *points*)**

Micheline a invité ses amies à un goûter gourmand sur sa terrasse.

Elle a prévu, en plus du thé et du café, un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à –19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C.

Au bout de 10 minutes, la température des gâteaux est de 1,3°C.

**Premier Modèle**

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

**Second modèle**

On note $T_n$ la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de $n$ minutes après leur sortie du congélateur.

Ainsi, $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température des gâteaux, on doit avoir la relation suivante :

Pour tout entier naturel $n$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

**1.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
**2.** Calculer $T_1$ et $T_2$. On donnera les valeurs arrondies au dixième près.
**3.** Démontrer en raisonnant par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a : $T_n \leq 25$.

En revenant à la situation étudiée, en quoi ce résultat était-il prévisible ?

**4.** Sans utiliser de raisonnement par récurrence, étudier le sens de variation de la suite $(T_n)$.
**5.** Démontrer que la suite $(T_n)$ est convergente.

**6.** On pose pour tout entier naturel $n$, $U_n = T_n - 25$.
***a)*** Montrer que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $U_0$.
***b)*** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
***c)*** En déduire la limite de la suite $(T_n)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

**7.** ***a)*** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.

Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

***b)*** Micheline est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. A l'aide de votre calculatrice, donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Micheline doit déguster son gâteau.

***c)*** Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier $n$ pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T = ………………………..
    while  T…………………… :
            T = ………………....
            n = ………………....
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

***Exercice II*** **(*8 points*)**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

**1.** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**2.** Soit $n$ un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de $u_n$.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

**3.** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 2n$.

**b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**c.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier $n_0$ tel que, pour tout entier naturel $n$ vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$ ?

**4.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**5.** On considère la suite $(v_n)$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

**a.** En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

*La commande « L.append »permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.*

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

Démontrer cette conjecture.

**b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, la forme explicite de $u_n$ en fonction de $n$.