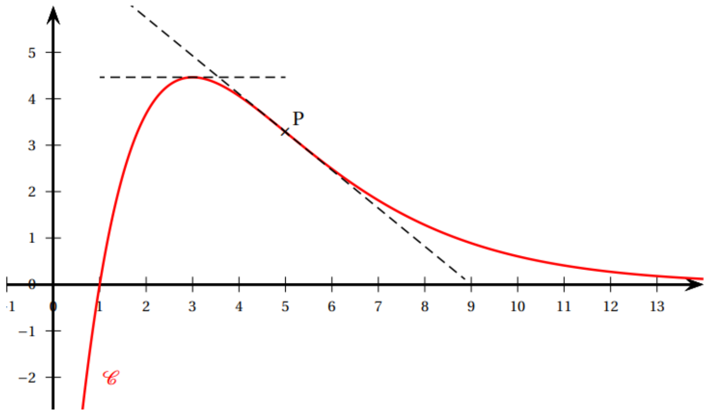
Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus/malus pour la présentation de la copie.

Exercice I (1 *point*)

Déterminer, sans justifier, la bonne réponse à la question du QCM suivant :

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



A. pour tout $x \in]0\,;\,5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

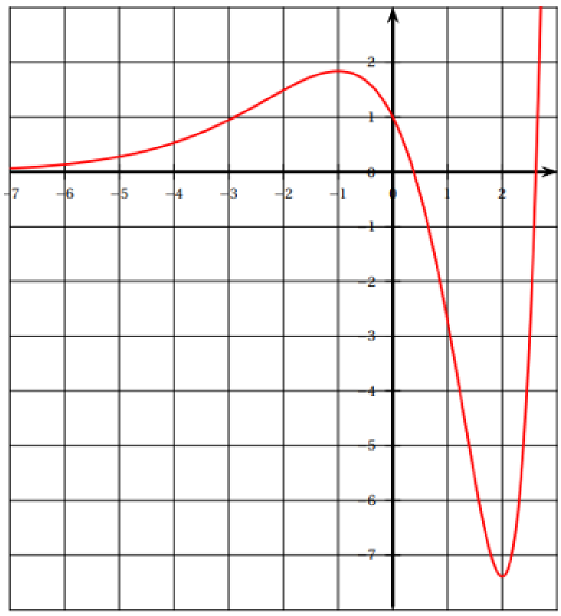
B. pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

C. pour tout $x \in]0\,;\,5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

D. pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Exercice II (2 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Exercice III **(3 *points*)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, et f ' la fonction dérivée de f.

1) Etablir que pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x$.

2) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

4) On admet que f est concave sur l'intervalle $[0 \ ; \ 1]$.

Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 \ ; \ 1]$, $(x^2 - 3x + 1)e^x \leqslant -2x+1$.

Exercice IV **(3 *points*)**

0) Traduire mathématiquement la phrase suivante : une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est majorée par 4.

1) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante, où n est entier naturel : $12n + 1 < 3^n$.

a) $\mathscr{P}(0)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

b) $\mathscr{P}(5)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

c) Enoncer la propriété $\mathscr{P}$ au rang n+1.

2) Voici une fonction en Python :

```
def u(n):
    u=2
    for k in range (n):
        u=2*u/(u**2+1)
    return u
```

a) Quelle valeur retourne en sortie cette fonction Python si on tape dans la console : $u(1)$? $u(2)$? Détaillez vos calculs sur la copie.

b) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) définie par cette fonction Python.

Exercice V **(4 *points*)**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1*a*) Calculer u_1 et u_2.

1*b*) Compléter le tableau suivant <u>sans justifier</u> :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

1*c*) Quelle conjecture fait-on sur l'expression explicite de u_n en fonction de n ?

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la conjecture précédente est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice VI **(1 *point*)**

Calculer la dérivée de chacune de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{e^{2x}}{e^x+1}$

Exercice VII **(2 *points*)**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n$.

Exercice VIII **(1 *point*)**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$.

En déduire, en bien détaillant vos étapes, le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice IX **(3 *points*)**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$.

1a) Déterminer la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1b) Justifier que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variation.

2) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

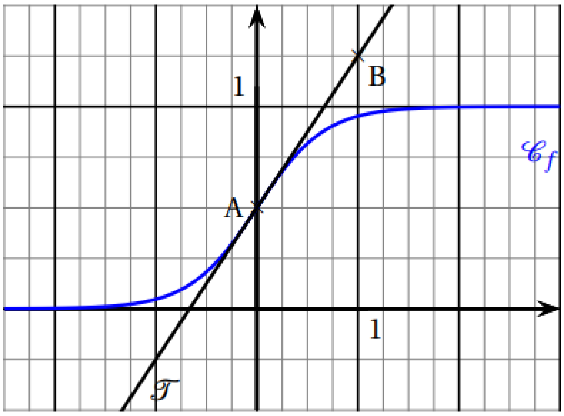
$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3) Donner le maximum d'informations concernant la suite (u_n), grâce aux résultats établis à la question 2).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Seulement q2 pour partie A.

Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

c. En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Justifier la réponse.