Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Exercice I **(6 *points*)**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = \sqrt{x^2+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = (-2x^3 + 5x + 9)$ sur $\mathbb{R}$ puis $h(x) = (-2x^3 + 5x + 9)^5$.

c) $i(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ (dérivée sous forme factorisée).

d) j définie sur $\mathbb{R}$ par : $j(x) = x + e^{3x}$.

e) $k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-4x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice II **(3 *points*)**

Voici un QCM. On ne vous demande ***pas*** de justifier vos réponses.

Pour chaque question, écrire sur votre copie la bonne réponse figurant parmi les quatre proposées :

1) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9 \cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty\,;+\infty[$ b. $[0\,;+\infty[$

c. $]-\infty\,;0]$ d. $[-3\,;3]$

2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.

Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $4\mathrm{e}^{-2x}$ **d.** $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

3) Toujours avec la fonction f de la question 2) on peut dire que le nombre de points d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$ est :

a.* 0** ***b. 1 ***c.*** 2 ***d.*** plus de 2.

4) La valeur exacte de $\left(\mathrm{e}^3\right)^{-2} \cdot \mathrm{e}^5$ est :

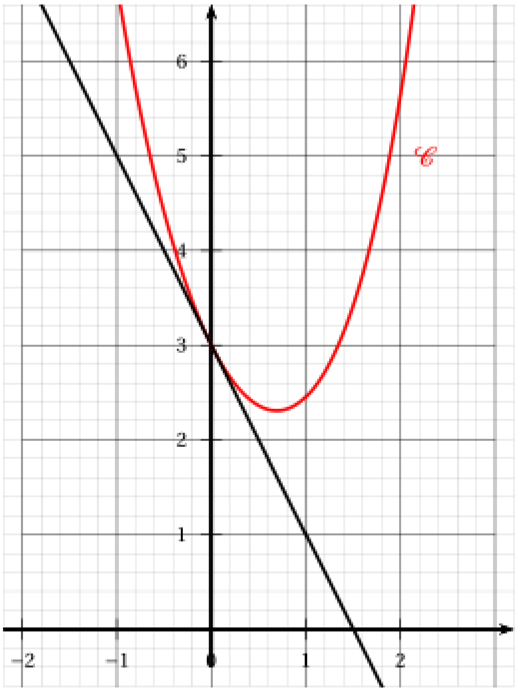
a. e^6 ***b.*** $\sqrt{e}$ ***c.*** e ***d.*** $\dfrac{1}{e}$

Exercice III **(2,5 *points*)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x} + ax + be^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

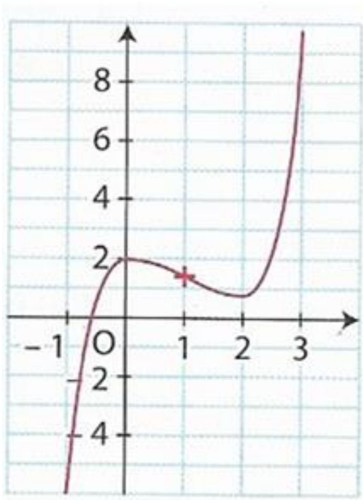
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.

   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice IV **(1,5 *points*)**

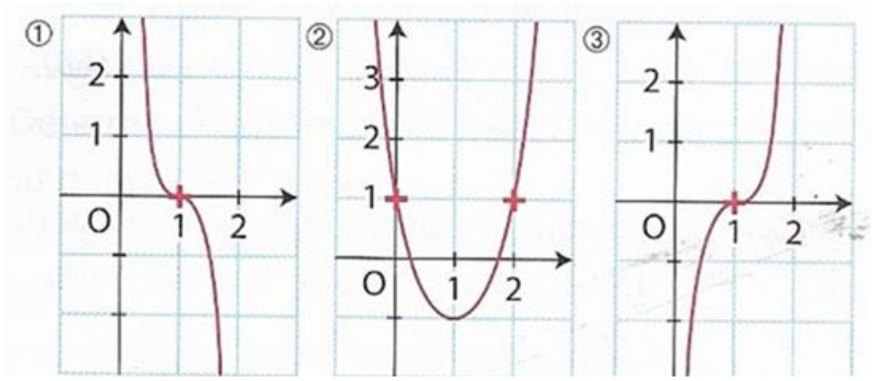
Dans un repère, voici la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;3]$.

a) Étudier graphiquement la convexité de la fonction f.



b) Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

Justifier.



<u>Exercice V</u> **(3 *points*)**

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2+x+1}$. On note C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer la fonction dérivée de f, puis étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

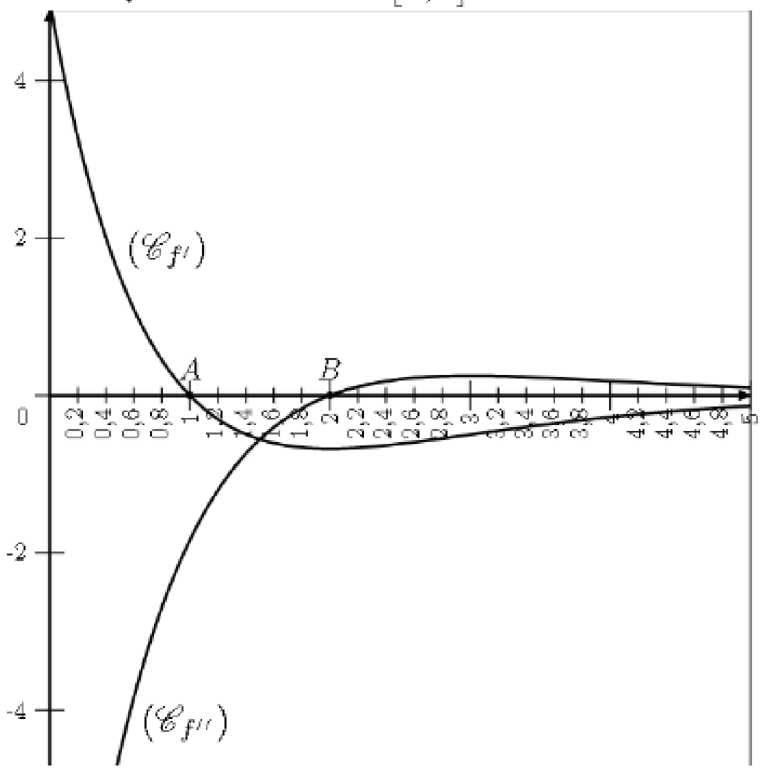
2) Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses. Justifier.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en le point A d'abscisse 0 de C_f.

<u>Exercice VI</u> **(1,5*points*)**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathscr{C}_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(\mathscr{C}_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;5]$.



Le point A de coordonnées $(1;0)$ appartient à $(\mathscr{C}_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2;0)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_{f''})$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.

2. Déterminer sur quel*(s)* intervalle*(s)*, la fonction f est convexe. Justifier.

3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur*(s)* abscisse*(s)*.

Exercice VII **(2,5 *points*)**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

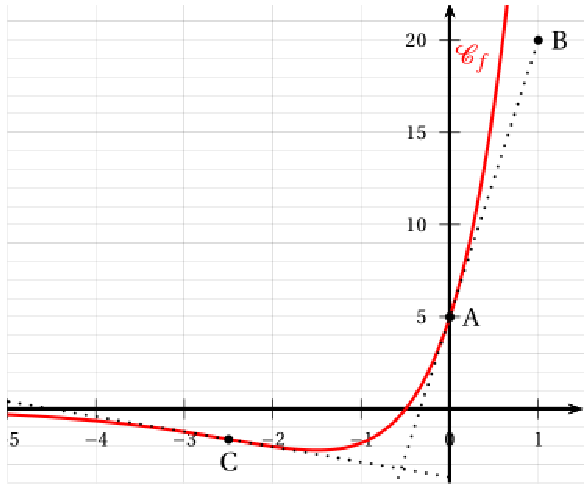
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

\+ *convexite*

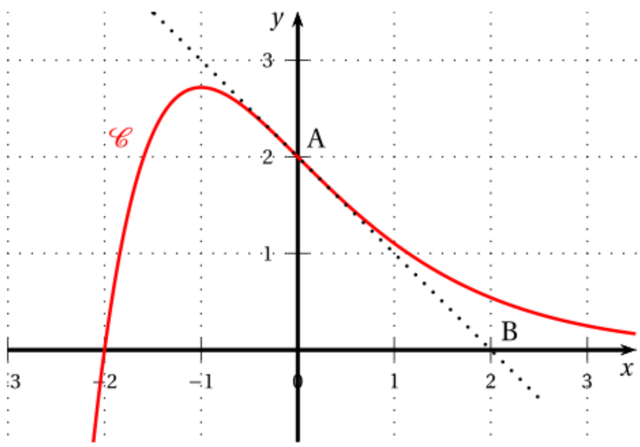
Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées (0; 5) et B de coordonnées (1; 20). Le point C est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f.



1. On peut affirmer que :
   - **a.** $f'(-0,5) = 0$
   - **b.** si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$
   - **c.** $f'(0) = 15$
   - **d.** la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0; 2) et B(2; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.