Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice ! Je ne réponds à aucune question, inutile de lever la main.

***Exercice d'échauffement* (3 points)**

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) qui passe par le point A(0 ; -2 ; 1) et dont un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix} -ln(2) \\ ln(2) \\ ln(4) \end{pmatrix}$.

2) On admet que les points B(3 ; -1 ; -2) et C(-1 ; 1 ; -1) appartiennent au plan (P).

Soit D(e^2 ; $-e^2$; $3e^2$). Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.

3) Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

" Une mesure arrondie à 0,1° près de $\widehat{BAC}$ est 68,4° ".

***Exercice I* (7 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points suivants :

$$A(1 ; 3 ; 0), \quad B(-1 ; 4 ; 5), \quad C(0 ; 1 ; 0) \quad \text{et} \quad D(-2 ; 2 ; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que DH $= \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2k \\ y &=& -3k \\ z &=& 1+k \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice II **(3 *points*)**

On se place dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.
On considère les points A(1 ; 0 ; 3), B(−2 ; 1 ; 2) et C(0 ; 3 ; 2).

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $-x+y+4z-11 = 0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

   b. Déterminer si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

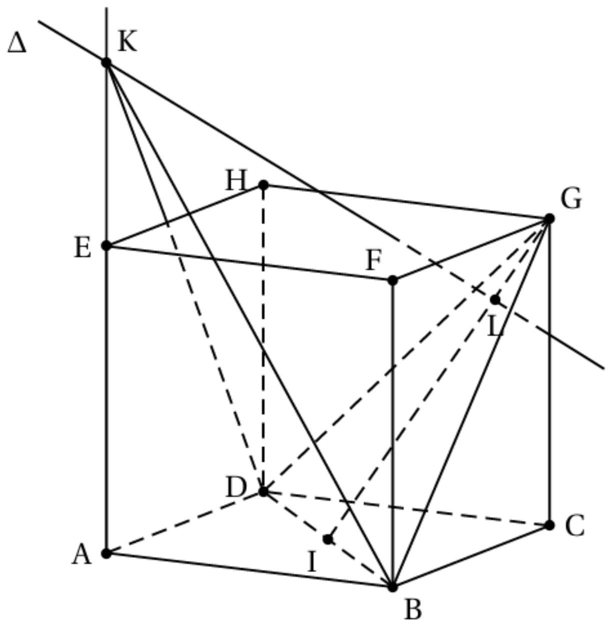
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point M(2 ; 1 ; 3) appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

Exercice III **(7 *points*)**

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
Aucune justification n'est attendue.

b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\ ;\ \frac{7}{8}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{7}{8} + t \\ y & = & \frac{7}{8} + t \\ z & = & \frac{3}{4} - t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.

4. a. Calculer la distance KL.

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.
Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & t' \\ z & = & -t' + a \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).
Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\ ;\ \frac{a+1}{3}\ ;\ \frac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.