Exercice I (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0;4;16),\quad B(0;4;-10),\quad C(4;-8;0)\quad \text{et}\quad K(0;4;3).$$

On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM = 13.

1. **a.** Vérifier que le point C appartient à la sphère S.
   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.
   On note D celui qui a une abscisse positive.
   a. Montrer que le point D a pour coordonnées $(12;0;0)$.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
   c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.
   On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre

$$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h.$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice II (2 points)

a) Factoriser : $n\,!+(n+1)\,!$

b) Simplifier au mieux : $A=\dfrac{2024!\times7!}{11!\times2023!}$ en détaillant les calculs.

c) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n\geqslant1$ par : $u_n=\ln((n^2-1)!)-\ln((n^2)!)$.

Déterminer la limite de cette suite.

Exercice III **(2 *points*)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois d'affilée une même pièce de monnaie non truquée. On appelle séquence la succession ordonnée des n résultats obtenus.

Par exemple si $n = 4$, (P, F, P, P) est une séquence, (F, F, P, P) en est une autre. (P désigne pile et F désigne face).

Pour toute la suite n est entier supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer le nombre total de séquences que l'on peut obtenir en lançant n fois cette pièce.

b) Combien de séquences conduisent à une alternance parfaite, c'est-à-dire pile suivi de face et face suivi de pile ?

c) Quelle est la probabilité qu'une séquence contiennent au moins deux piles ?

Exercice IV **(1 *point*)**

Matt fait un loto le 01/04/2024. On rappelle que remplir une grille de loto revient à choisir 5 numéros compris entre 1 à 49 d'une première grille, ainsi qu'un numéro chance de 1 à 10 d'une seconde grille.

Quelle est la probabilité qu'aucun des numéros sortis (les cinq numéros ainsi que le numéro chance) lors du tirage du 01/04/2024 ne ressortent lors du tirage du 08/04/2024 ? Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice V(**1,5 *points***)

De combien de façons peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex-aequo ?

Exercice VI(**1,5 *points***)

Un rectangle est formé de dix cases qui sont recouvertes par un enduit à gratter.

Il y a deux cases qui portent la valeur 1€, deux qui portent la valeur 2€, deux portant la valeur 5€ et toutes les autres indiquent 0€.

On doit gratter <u>deux cases seulement</u> sur les dix recouvertes. Le jeu ne rapporte rien si on gratte plus de deux cases !

On gagne le montant commun indiqué si on gratte deux cases portant le même gain.

Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu de grattage ?

Exercice VII(**3 *points***)

1) Dénombrer, en justifiant, les anagrammes du mot : ABEILLES

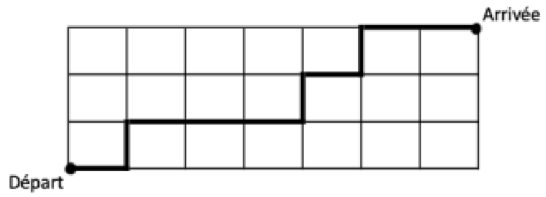
2) Avec l'alphabet usuel, combien de mots palindromes de 7 lettres peut-on écrire ? (Par exemple le mot BGRERGB est un palindrome de 7 lettres).

3) Avec les chiffres 0 et 1, combien de nombres palindromes à n chiffres peut-on écrire ? (n est ici un entier naturel non nul, par exemple 1001 est un nombre palindromes à quatre chiffres).

Exercice VIII **(1 *point*)**

Un mobile se déplace pour aller du point de départ au point d'arrivée sur la figure ci-dessous, avec comme contraintes d'avancer de gauche à droite de 1 carreau ou bien de monter de 1 carreau à chaque déplacement.

Le dessin ci-dessous en gras donne un déplacement possible du mobile du point de départ au point d'arrivée.



Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant :

" Il y a 120 de chemins distincts pour aller du départ à l'arrivée ".

Exercice IX **(1,5 *points*)**

A l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 90 filles.

Les candidats admis sont classés par ordre de mérite (du premier au dernier admis, sans ex-aequo).

Quelle est la probabilité que les trois premiers admis soient des filles ? Arrondir à 10^{-2} près.

Exercice X **(1,5 *points*)**

1) Combien doit-il y avoir au minimum d'élèves dans un lycée, pour qu'au moins deux élèves aient les mêmes initiales ?

2) Dans un ensemble E de cardinal 6, combien y-a-t-il de parties de E qui sont de cardinal impair en tout ?

Exercice XI **(3 *points*)**

Lily oublie fréquemment son code PIN à 6 chiffres pour déverrouiller son si cher téléphone sur lequel elle passe une grande partie de son temps libre.

a) Combien existe-t-il de codes PIN à 6 chiffres ?
b) Combien de codes PIN à 6 chiffres contiennent exactement deux fois le chiffre 0 ?
c) Combien de codes PIN à 6 chiffres contiennent la séquence 1987 ? (ex : 319874 est un tel code).
d) Combien de codes PIN à 6 chiffres contiennent chacun des chiffres 1,9,8 et 7 et aucun autre ?
e) Combien de codes PIN à 6 chiffres contiennent au moins un chiffre pair ?
f) Combien de codes PIN à 6 chiffres ont plus de chiffres pairs que de chiffres impairs ?

Bonus (hors barème) :

g) Suite de l'exercice X : Combien de codes PIN à 6 chiffres n'ont aucune répétition de chiffres pairs ?
h) Soit E un ensemble fini non vide, dont un des éléments est a. Montrer qu'il y a autant de parties de E contenant l'élément a que de parties de E ne contenant pas l'élément a. (Ce n'est pas une question de philosophie !).