Exercice I **(8 *points*)**

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \qquad N\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), \qquad P\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   b. Calculer l'aire du triangle MNP.
5. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(5 ; -8 ; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées F(1; 0; 1).
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).

Déterminer les coordonnées du point L (sous forme de fractions irréductibles).

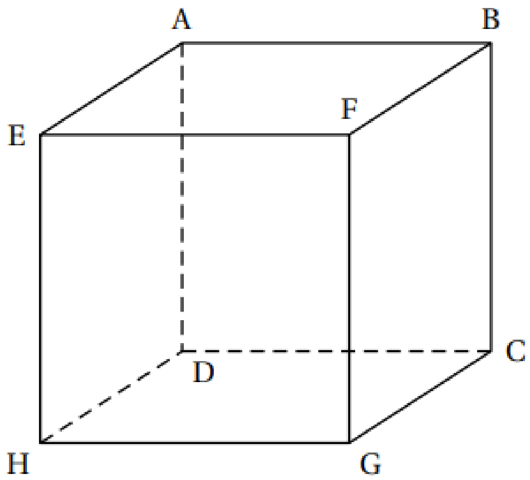
8. Montrer que $FL = \dfrac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

Exercice II **(3 *points*)**

Cet exercice est un vrai-faux avec justification : pour chacune des affirmations ci-dessous, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point !

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DH},\,\overrightarrow{DC},\,\overrightarrow{DA}\right)$.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

***Affirmation* 1**

« *Il existe un unique point* K *appartenant à la droite* (FG) *tel que le triangle* KMN *soit rectangle en* K. »

***Affirmation* 2**

« *La mesure de l'angle* $\widehat{DFB}$ *arrondie au degré près est* 120°. »

***Exercice III* (2 *points*)**

Voici un QCM. Pour chaque question une seule réponse proposée est exacte.

Déterminer la bonne réponse à chacune des questions suivantes. Vous recopierez pour chaque question sur votre copie la lettre choisie ainsi que la réponse associée.

Aucune justification n'est ici demandée !

***Question* 1** :

On considère : le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x+2y+z-4=0$;
le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x-4y-2z+7=0$.

L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est :

a. un plan; **b.** l'ensemble vide;
c. une droite; **d.** réduite à un point.

Question 2

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+r \\ y & = & 1+r \\ z & = & -r \end{array}\right. \quad (r\in\mathbb{R}) \quad \text{et } (d_2)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-s \\ y & = & -1+s \\ z & = & 2-s \end{array}\right. \quad (s\in\mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes. **b.** strictement parallèles.
c. confondues. **d.** non coplanaires.

Question 3

On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est :

$$2x-y+z-1=0.$$

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+u \\ y & = & 4+u \\ z & = & 1-u \end{array}\right. \quad (u\in\mathbb{R})$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P). b. incluse dans le plan (P).
c. strictement parallèle au plan (P). **d.** orthogonale au plan (P).

0

Question 4

On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x-2y+z+1=0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x+y+z-6=0$.
Les plans (P_1) et (P_2) sont :

a. sécants et perpendiculaires. **b.** confondus.
c. sécants et non perpendiculaires. **d.** strictement parallèles.

Exercice IV (7 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $\mathrm{B}(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t\end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère le point $\mathrm{A}(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $\mathrm{A}M_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

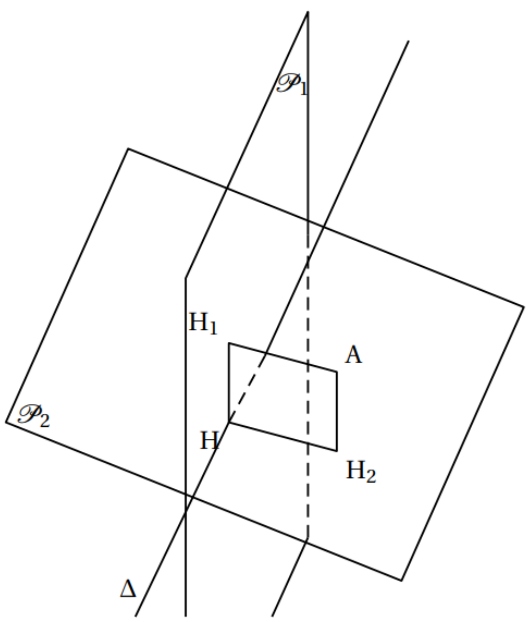
b. En déduire que $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.
On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;0\,;2)$.
Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.
Montrer que $\mathrm{AH_1HH_2}$ est un rectangle.



Annexe à l'exercice 1 à rendre avec la copie.