Exercice I **(1 point)**

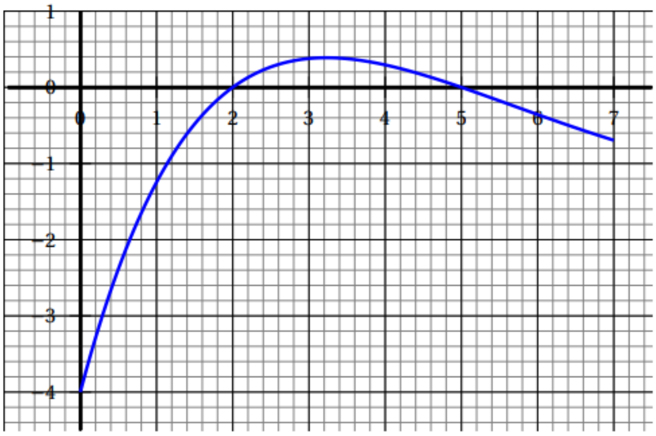
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Question 1

La courbe ci-dessous représente une fonction h définie sur $[0\ ;\ 7]$.



Soit H une primitive de h :

a. *H est strictement monotone sur* $[0\ ;\ 7]$.
b. *H est convexe sur* $[0\ ;\ 3]$.
c. *H ne prend que des valeurs positives.*
d. *H s'annule deux fois sur* $[0\ ;\ 7]$.

Question 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 1 + x\mathrm{e}^x$ **b.** $F(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$

c. $F(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$ **d.** $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice II **(5 points)**

1) Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle donné :

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{5x} + x^2 + 6x - 1$

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{x^2+3}$.

c) h est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{e^{-x}-5}{e^{-x}+5x}$

2) k est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $k(x)=x^2(3ln(x)+1)$.

Démontrer que la fonction K définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $K(x)= x^3ln(x)$ est une primitive de k sur cet intervalle. En déduire la primitive de k qui s'annule lorsque $x = e$.

3) Montrer que la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : $(x-1)y' + y = 2x$.

Exercice III **(2 *points*)**

Soit (E) l'équation différentielle suivante : $y' +3y = e^{-2x}$

a) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)= e^{-2x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'+3y = 0$.
c) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Indication : f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à dire quoi concernant $f - u$?

Exercice III **(2 *points*)**

Soit (E) l'équation différentielle suivante : $2y'' + y' = 1$.

On pose $z = y'$.

1) Déterminer l'équation différentielle notée (E') vérifiée par z, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV **(4 *points*)**

On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t, où t est exprimé en jours.

On admet que la fonction N est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle suivante, notée (E) : $y' = ay$, où a est une constante réelle.

a) Résoudre (E) sur $[0\ ;+\infty[$.

b) Déterminer alors l'expression de $N(t)$ en fonction de a, sachant qu'à l'instant initial $t=0$, le corps est formé d'un milliard de noyaux radioactifs.

c) Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

Démontrer que la valeur exacte de a est égale à $\frac{-\ln(2)}{18}$, puis en déduire le sens de variation de N sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d) Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$.

e) Le corps n'est plus considéré comme radioactif lorsqu'il contient moins de 100 noyaux radioactifs. Quelle sera la durée nécessaire, exprimée en jours, afin qu'il ne soit plus considéré comme radioactif ? Justifier votre réponse.

Exercice V (6 *points*)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?