Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Les copies respectant scrupuleusement ces consignes auront un demi-point en plus 😊 !

Exercice I (8,5 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) \text{ et } K(-3 ; 14 ; 14).$$

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   c. Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. **a.** Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
   c. Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

Exercice II (11,5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

U(2 ; 0 ; 3), V(0 ; 2 ; 1) et W(-1 ; -1 ; 2). On admet que les points U, V, W ne sont pas alignés.

a. Calculer la valeur exacte des longueurs UV et UW.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{UW}$, et en déduire la valeur exacte du cosinus de $\widehat{VUW}$, puis donner la valeur approchée au dixième de degré près de la mesure de l'angle $\widehat{VUW}$.

c. Démontrer que le plan $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne : $-x + y + 2z + 1 = 0$ et le plan (UVW) sont parallèles.

Partie B

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(2;4;0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont $(3;1;1)$.

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1;2;0)$.

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.