Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus/malus pour la présentation de la copie.

Exercice I **(5 *points*)**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = -x + 1 + e^{3x+4}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 2x^3 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$, puis $h(x) = (2x^3 + 3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$.

c) $i(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0\ ;+\infty[$ (mettre la dérivée sous forme factorisée).

d) $j(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $k(x) = \sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice II **(4 *points*)**

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x+1)e^{2x}$. On note C_f sa courbe représentative, et f' la fonction dérivée de f.

1) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-2x+1)e^{2x}$.

2) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation.

3) Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier.

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en son point A d'abscisse 0.

5) On admet que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = -4xe^{2x}$.

Etudier, en justifiant, la convexité de f sur $\mathbb{R}$, et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f sur $\mathbb{R}$.

Exercice III **(2,5 *points*)**

Voici un QCM. On ne vous demande ***pas*** de justifier vos réponses.

Pour chaque question, recopier sur votre copie son numéro, ainsi que ***la*** bonne réponse figurant parmi les quatre proposées :

1) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.

Le plus grand intervalle sur lequel h est convexe est :

a. $\mathbb{R}$; ***b.*** $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$; ***c.*** $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$; ***d.*** $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

2) On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}$.

Soit f'' la dérivée seconde de f :

Pour tout réel $x > 0$, $f''(x)$ est égale à :

a. $\frac{x^3+2e^x}{x^3e^x}$ ***b.*** e^{-x} ***c.*** $\frac{-1}{x^2} - e^{-x}$ ***d.*** $\sqrt{x} + e^{-x}$

3) Les fonctions c et s sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $c(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $s(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

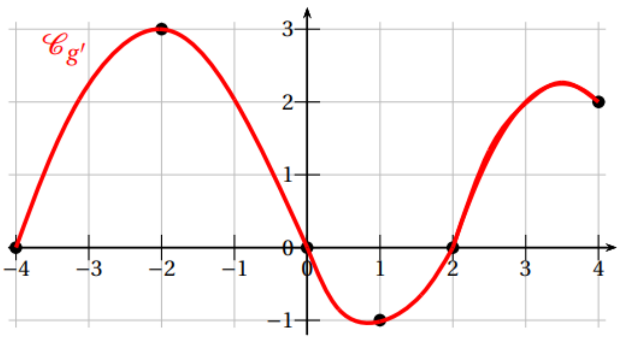
Pour tout réel x, on a :

a. $s(x) \neq 0$
b. $(c(x))^2+(s(x))^2=1$
c. $c'(x)=-s(x)$
d. $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$.

4)

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
d. g admet un minimum en 0.

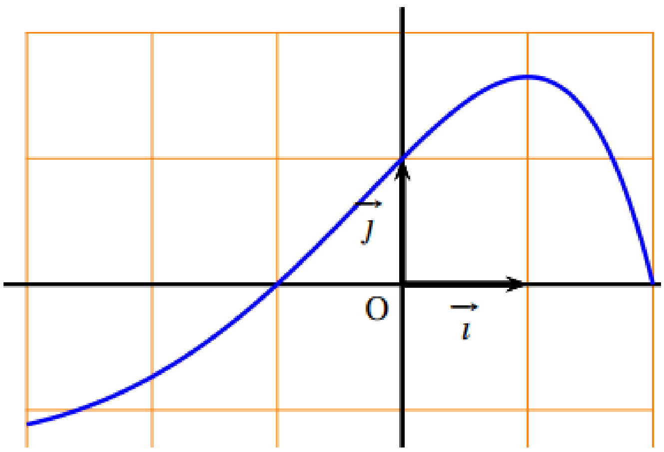


Exercice IV **(*2 points*)**

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.

On sait de plus que la courbe de f passe par le point A$(0 ; -1)$.

Enfin, la courbe ci-dessous, notée $C_{f'}$,est la courbe représentative de la fonction f' (dérivée de f).



Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, <u>en justifiant</u> votre réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point) :

<u>Affirmation 1</u> : “ Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-3 ; -1]$, $f'(x) \leqslant 0$ ”.

<u>Affirmation 2</u> : “ La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$ ”.

<u>Affirmation 3</u> : “ Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$ ”.

<u>Affirmation 4</u> : “ La tangente à la courbe C_f représentant la fonction f, en son point d'abscisse 0 passe par le point B de coordonnées $(1 ; 0)$ ”.

Exercice V **(2,5 *points*)**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + be^{x} + e^{-x}$, où a et b sont deux réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que :

- la courbe de f passe par le point C(0 ; 4).

- la tangente à la courbe de f en le point C passe par le point D(2 ; 0).

1) Déterminer, en justifiant, la valeur de b.

2) Déterminer, en justifiant, la valeur de $f'(0)$.

3) Exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de a et x.

4) En déduire la valeur de a, puis l'expression de $f(x)$.

Exercice VI **(2 *points*)**

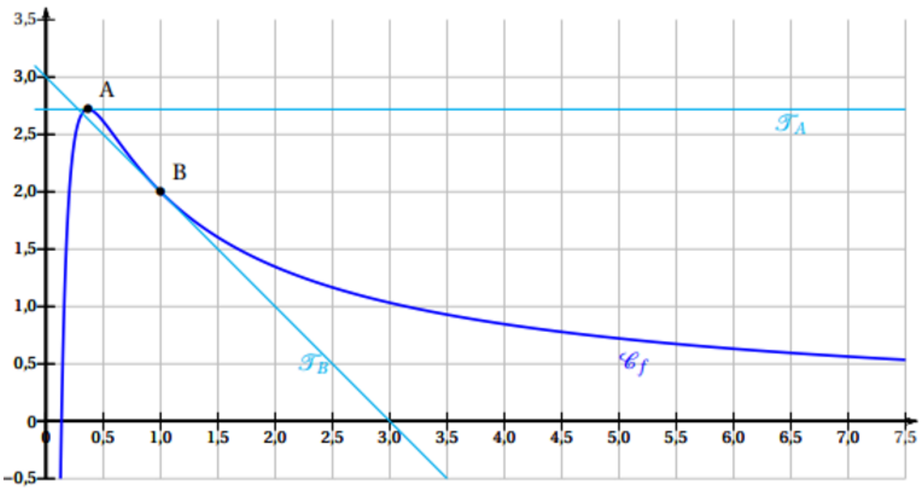
Sur le graphique ci-dessous, on trouve :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;\,e\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.

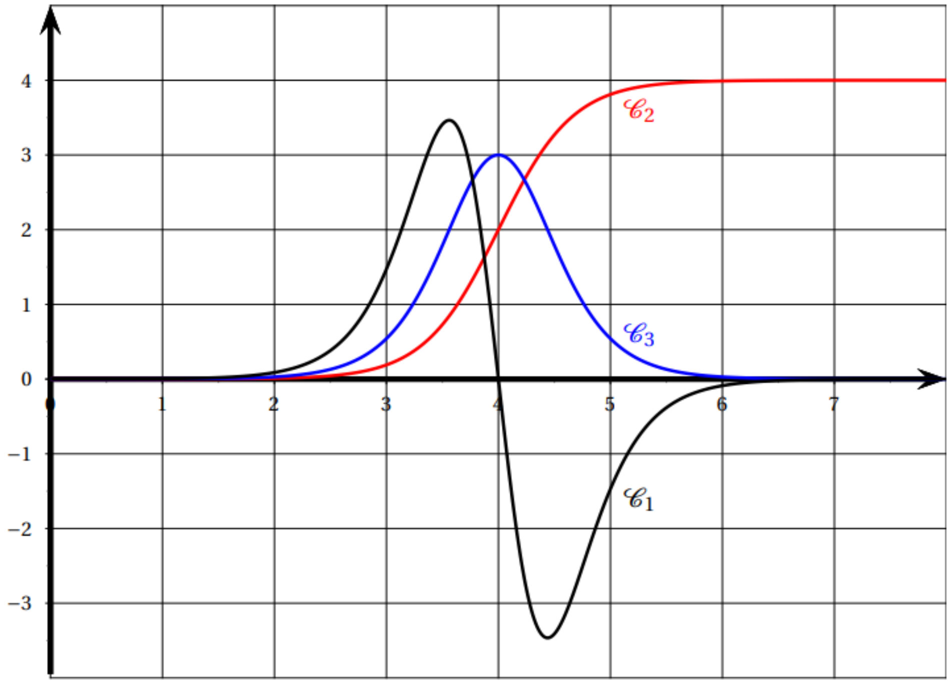


On note f' la fonction dérivée de f.

1) Déterminer graphiquement les valeurs de : $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2) En déduire une équation de la droite (AB).
3) Etudier graphiquement la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice VII **(2 points)**

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.