

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.

Exercice I (5 points)

1) Soit n un entier naturel. Simplifier au mieux les expressions suivantes, en détaillant les calculs :

$$A = \frac{100! \times 7!}{11! \times 98!} ; B = \frac{13! - 11!}{12!} ; C = \ln(n!) - \ln((n+1)!)$$

2) Démontrer que pour tout entier k et p tels que : $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq p \leq n$:
$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{n-p} = \binom{n}{p} \times \binom{p}{k},$$

Exercice II (2 points)

Le tiercé est un jeu consistant à parier sur trois vainqueurs parmi 20 chevaux numérotés de 1 à 20 faisant une course. L'ordre d'arrivée des chevaux importe. Par exemple le tiercé (3 ; 14 ; 15) signifie qu'on parie que le numéro 3 arrive en premier, le numéro 14 en seconde position, et le numéro 15 en troisième position. Ce n'est pas le même que le tiercé (14 ; 3 ; 15)!

- Déterminer combien de tiercés différents on peut réaliser avec ces 20 chevaux qui courent.
- On gagne de l'argent si on a parié sur les 3 numéros gagnants (dans l'ordre où ils sont arrivés ou dans un autre ordre que celui d'arrivée). Dénombrer le nombre de tiercés gagnants.
- Une grille de tiercé coûte 2€. A votre avis, combien rapporte au maximum le fait d'obtenir un tiercé dans l'ordre ?

Exercice III (2 points)

Matt fait un loto le 23/05/2023. On rappelle que remplir une grille de loto revient à choisir 5 numéros de 1 à 49 ainsi qu'un numéro chance de 0 à 9.

- Quelle est la probabilité qu'aucun des numéros sortis (les cinq numéros ainsi que le numéro chance) lors du tirage du 23/05/2023 ne ressortent lors du tirage du 30/05/2023 ?
- On ne tient pas compte ici du numéro chance. Quelle est la probabilité que deux des numéros (de 1 à 49) sortis lors du tirage du 23/05/2023 ressortent au tirage du 06/06/2023 ?

Exercice IV (2 points)

A l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 90 filles. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice V (2 points)

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BACCALAUREAT? Expliquer.

Exercice VI (2 points)

- Combien doit-il y avoir au minimum d'élèves dans un lycée, pour qu'au moins deux élèves aient les mêmes initiales ?
- Dans un ensemble E de cardinal 7, combien y-a-t-il de parties de E de cardinal pair en tout ?

Exercice VII (6 points)

- a) Combien existe-t-il de mots de 9 lettres (= succession de 9 lettres prises dans l'alphabet usuel) ?
- b) Combien de mots de 9 lettres contiennent le mot *MERCI* ?
- c) Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant au moins une voyelle ? On rappelle que les voyelles sont : {A ; E ; I ; O ; U ; Y}.
- d) Combien de mots de 9 lettres contiennent plus de consonnes que de voyelles ?
- e) Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant aucune voyelle répétée ?

Exercice VIII (1,5 points)

6 filles et 6 garçons s'assoient sur un tronc d'arbre rectiligne pour déjeuner.

- a) De combien de façons peut-on les placer en alternance parfaite de sexe ?
- b) De combien de façons peut-on les placer s'ils s'assoient autour d'une table circulaire à 12 places ?

Exercice IX (2,5 points)

Dix voitures sont garées en épi côte à côte. Trois de ces véhicules sont blancs. Déterminer la probabilité que les trois véhicules blancs soient garés côte à côte (c'est-à-dire sur trois places consécutives).