Nota bene : ce travail est à rendre pour le 16 Janvier. Il fait une synthèse sur le chapitre logarithme népérien, et permet également de revoir à peu près tous les points vus en cours depuis Septembre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x+1)\leq 0$ *b)* $4e^{3x-1}=1$ *c)* $e^{2x}+e^{x}-12=0$

d) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n\geq n_0$, on ait : α) $1-0{,}84^n>0{,}95$; β) $0{,}34^n<10^{-6}$; γ) $\dfrac{1}{2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+1}\geq 0{,}999$.

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t)=10^6\times e^{0{,}25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au ***doublement*** de la population initiale. Même question concernant son ***décuplement***.

Exercice II

Pour tout réel a, on considère la fonction notée f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x)=e^{x-a}-2x+e^{a}$.

1) Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ? Justifier votre démarche.

Exercice III

Faire les exercices suivants du livre :

42 page 331 – 52 page 332 – 64 question *b*) uniquement page 332.

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice V

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\ ;\ 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. **a.** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

   e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import*
def pgm():
    u=4
    while u-14.2<0:
        u=5*log(u+13)
    return u
```

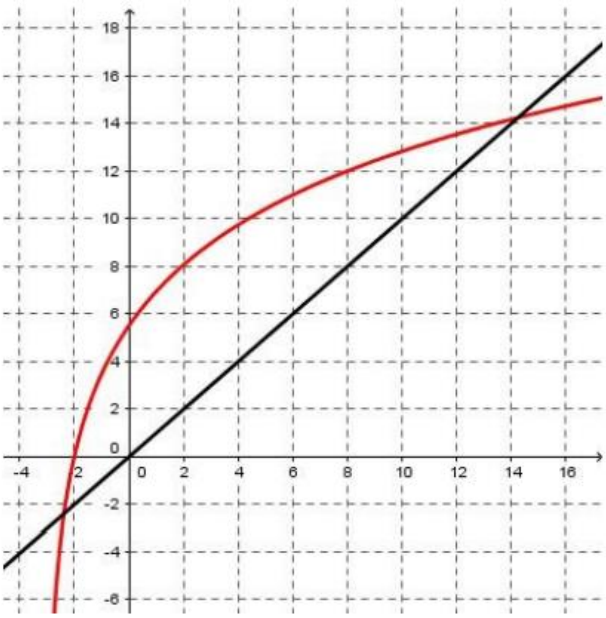
Remarque : sur Python, log désigne la fonction logarithme népérien.

0. Quel est le rôle de cet algorithme ?

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Annexe 1



Exercice facultatif

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

   $$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

   $$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Exercice pour réviser les probabilités

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.
On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.
Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.
Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».
On choisit une vache au hasard dans la région.
Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de $0,992$;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984 .

On désigne par :

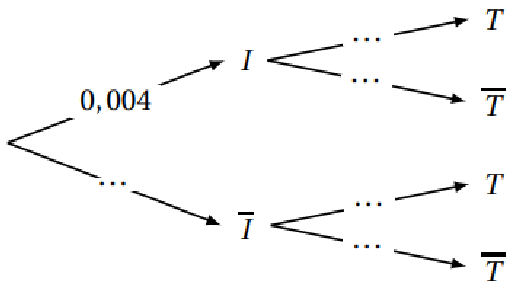
- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.

Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.