Nota bene ***: ce travail porte sur les fonctions et le début de l'espace. Il est à rendre pour le 17 Janvier. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.***

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

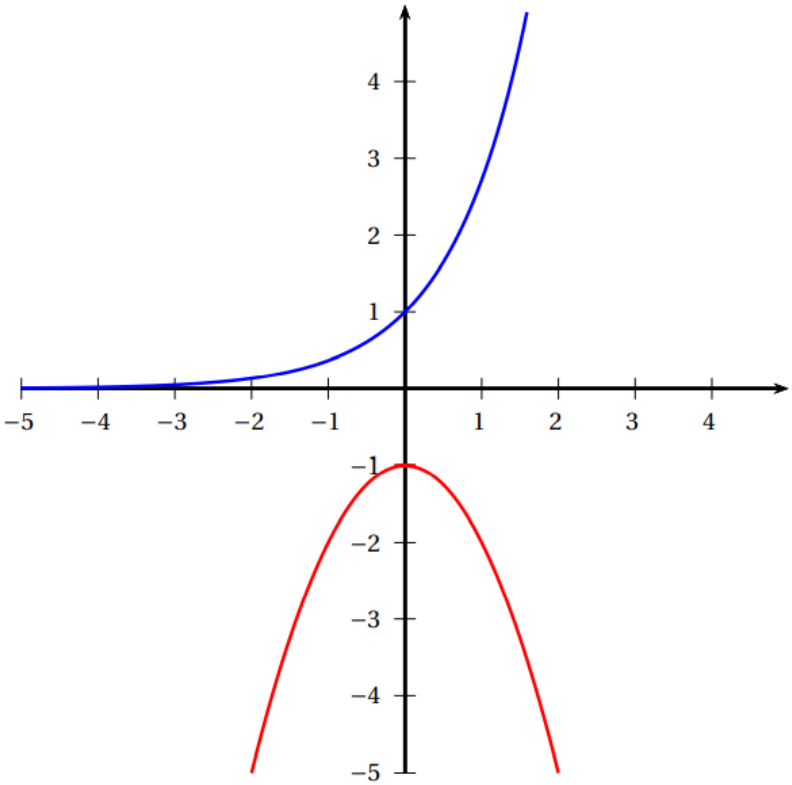
Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

0. *Déterminer quelle est la courbe représentative de $(\mathscr{C}_1)$ et celle de $(\mathscr{C}_2)$ en justifiant brièvement.*

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.



Annexe 1

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

a. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

c. En déduire que les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{lcr} e^a & = & -2b \\ e^a - ae^a & = & b^2 - 1 \end{array}\right. .$$

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :

$$\left\{\begin{array}{lcr} e^a & = & -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) \quad : \quad e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues.

Exercice II

On se donne un repère de l'espace et on considère les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 4 ; 5) et C(0 ; 0 ; 11).

1a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

1b) En déduire une représentation paramétrique de la droite passant par C et parallèle à (AB).

2) Montrer que A, B et C définissent un unique plan.

3) Soit D(3 ; 0 ; 1). Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) avec soin.

Qu'en déduisez-vous concernant les points A, B, C et D ?

4) Déterminer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère ACBE soit un parallélogramme.

Trouver les coordonnées du centre K du parallélogramme ACBE.

5) Soit F(-4 ; 4 ; 15).

Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera, tels que : $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Qu'en déduit-on ?

6) Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$. Caractériser cette droite.

7) Déterminer, en justifiant, si chacun des points W(0,4 ; 2,5 ; 1) et L(-9 ; 14 ; -21) appartient ou pas à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice III

Traiter les exercices suivants de votre livre numérique :

53 page 97 ; 100 page 104 ; 49 page 155 ; 53 page 156.

Exercice IV

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse, une réponse multiple, ou l'absence de réponse à une question ne rapporte aucun point.

Reporter sur sa copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée, mais pour ce DM, vous pouvez toujours justifier si vous le voulez !

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

A(2 ; -2 ; 3), B(0 ; 2 ; 5), C(-1 ; 0 ; 4) et D(-2 ; 6 ; 1).

Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+3t \\ z = 4+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2+4t \\ z = 3-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2+4t \\ z = 5+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 4+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\begin{cases} x = -t \\ y = 2+2t \\ z = 4+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2.

Réponse A : Les points A, B et C sont alignés.

Réponse B : ABCD est un parallélogramme.

Réponse C : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Réponse D : Les points A, B et D définissent un unique plan.

3. Soit d la droite passant par le point K milieu de [AB] et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les droites Δ et d sont :

Réponse A : Non coplanaires

Réponse B : Parallèles

Réponse C : Confondues

Réponse D : Sécantes

4. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : E(-3 ; 9 ; 5)

Réponse B : F(7 ; -6 ; 1)

Réponse C : G(1 ; 0 ; 3)

Réponse D : H(1 ; 2 ; 4)