Première Maths Groupe 4 **Devoir à la maison numéro 8** **Janvier 2023**

Ce travail est à rendre pour le Mercredi 1 Février.

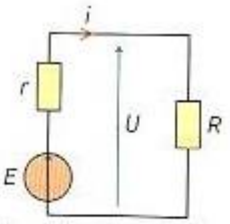
Vous rendrez ce devoir par groupe de trois ou quatre élèves, avec les noms de chacun d'eux sur chacune des copies rendues.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I



Lorsqu'un générateur électrique de force électromotrice E (en volts) et de résistance interne r (en ohms) est relié à une résistance R, la force E est égale à $E = (r + R)i$, où i est l'intensité du courant (en ampères).
La puissance P (en watts) délivrée par le générateur est définie par $P = Ri^2$.
On donne $E = 10$ V et $r = 20\Omega$.

1. Exprimer P en fonction de la seule variable r.
2. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 50]$ par :
$$f(x) = \frac{100x}{(20+x)^2}.$$
Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3. Pour quelle valeur de R la puissance P est-elle maximale ? Que vaut alors cette puissance ?

Exercice II

1) Exprimer, en fonction de $cos(x)$ et de $sin(x)$, chacune des expressions suivantes :

$A = cos(-x) + sin(-x) + cos(\pi + x) + sin(\pi - x)$. $B = sin(5\pi + x) + cos(x - 3\pi)$

2) Simplifier, en détaillant les étapes, la somme $S = sin(\frac{\pi}{8}) - sin(\frac{3\pi}{8}) + sin(\frac{5\pi}{8}) - sin(\frac{7\pi}{8})$.

3a) Déterminer, en justifiant, la valeur exacte de $sin(\frac{7\pi}{6})$, puis celle de $cos(\frac{5\pi}{3})$.

3b) Sachant que $sin(x) = \frac{1}{9}$ et que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ déterminer la valeur exacte de $cos(x)$.

3c) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier n, la valeur de $cos(n\pi)$.

Exercice III

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations, puis précisez pour chacune d'entre-elles les solutions situées dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

a) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$; *b)* $\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0$; *c)* $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x) = 0.$

d) $2\sin^2(x) + 7\cos(x) + 2 = 0$. *(Indication : #Pythagore-trigonométrique).*

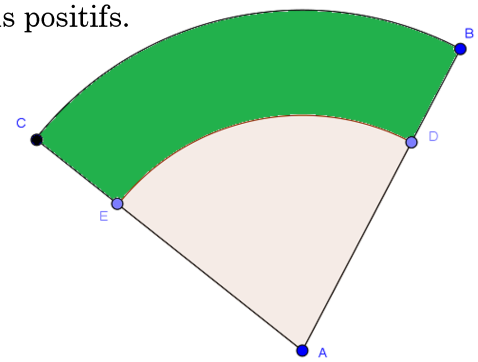
2) Résoudre dans $]-\pi\ ;\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin(x) \leq 0{,}5$. S'aider du cercle trigonométrique !

3) On suppose que x est un réel solution de l'équation : $4\cos^2(x) - 1 = 0$.

Démontrer que les réels $x + \pi$ et $x - \pi$ sont également solutions de cette équation.
On ne vous demande pas de résoudre cette équation !!!

Exercice IV

Déterminer une relation simple donnant l'aire d'une portion de couronne circulaire (en vert sur la figure), dont l'angle au centre mesure θ radians, et avec les rayons $AD = a$ et $AB = b$ où a et b sont deux réels positifs.



Exercice V

Un peu de géométrie à l'ancienne….

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$ radians. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment $[AC]$ en le point D.

a) Faire une figure (grande, pas un timbre-poste !).

b) Donner la mesure en radian de chacun des angles des triangles ABC, ADB et BCD.

c) En déduire que : $DA = DB = CB$.

d) On note a la longueur du segment $[BC]$. Démontrer que :

- ✓ $AB = 2a\cos(\frac{\pi}{5})$.
- ✓ $CD = 2a\cos(\frac{2\pi}{5})$.
- ✓ $BC = 4a\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})$.

e) En déduire que : $\cos(\frac{\pi}{5}) - \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2}$ et que $\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}$.

f) Etablir que pour tous réels a et b, on l'identité suivante : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

g) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice VI

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, et justifier :

Affirmation 1 : *Pour tout réel x,* $\cos(x) \neq \sin(x)$.

Affirmation 2 : ***Il existe au moins un réel x et un réel y pour lequel :*** $\cos(x+y)=\cos(x)+\cos(y)$.

Affirmation 3 : *La valeur exacte de* $\cos\left(\frac{-37\pi}{4}\right)$ *est égale à* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Affirmation 4 : *Pour tout réel x,* $\sin(x) < 2$.

Exercice facultatif

Lorsque je tape sur ma calculatrice l'expression : $\sin\left(\frac{180\pi}{180+\pi}\right)$, j'obtiens le même résultat, que ma calculatrice soit réglée en mode *degré* ou en mode *radian*.

Faites le test sur votre calculatrice, et expliquez de ce phénomène !