***Nota bene* : ce travail sur les probabilités est à rendre pour le 24 Novembre. Vous rendrez *un seul lot* de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec *les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe* sur *chaque copie du lot*.**

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Une enquête porte sur les 1200 salariés d'une entreprise constituée de 3 étages, et on s'intéresse à deux choses :

- ✓ A quel étage est situé le bureau dans lequel travaille chaque salarié ?
- ✓ Pour se rendre à son bureau, un salarié prend-il l'escalier ou l'ascenseur ?

Chaque salarié est interrogé et voici les résultats obtenus :

- 900 personnes utilisent l'ascenseur, et parmi celles-ci, 200 vont au premier étage, 300 au second étage, et 400 au troisième étage.
- Les autres personnes utilisent les escaliers, et parmi celles-ci, un tiers va au second étage et les autres vont au premier étage.

On choisit au hasard une personne de cette entreprise.
On notera : E_1 l'événement : *" la personne va au premier étage"*.
E_2 : *"la personne va au second étage"* et E_3 : *"la personne va au troisième étage"*.
A : *" la personne prend l'ascenseur"*.
1a) Faire un arbre de probabilités qui traduit les données de l'énoncé.

1*b*) Calculer $p(\bar{A} \cap E_2)$ et interprétez concrètement le résultat.

1c) Démontrer que les événements E_1, E_2 et E_3 sont équiprobables.
1d) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au deuxième étage.
2) A présent, on interroge 60 personnes de cette entreprise. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de personnes, qui parmi les 60 interrogées, vont au second étage.
a) Déterminer en justifiant, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer, au *dix-millième près*, la probabilité que 15 personnes exactement aillent au deuxième étage.
c) En moyenne, sur les 60 personnes, combien se rendent au deuxième étage ?
d) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 20 personnes se rendent au deuxième étage.

Exercice II

45 page 442 du livre.

Exercice III

70 page 450 du livre.

Exercice IV

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}9$.
A l'aide de votre calculatrice, calculer, à 10^{-4} près :

a) $p(X=27)$

b) $p(X \leq 25)$

c) $p(X \geq 27)$

d) $p(21 \leq X \leq 27)$

e) Déterminer le plus petit entier naturel b tel que : $p(X \leq b) \geq 0{,}95$.

Exercice V

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
   c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
   d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.
2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

   a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.

b.

Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :
    n = 0
    P = 0
    while P < 0,99 :
        n = n + 1
        P = 1 - 0,55 ** n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice VI

La formule établie à la question 1a) porte le nom de formule de Bayes, et est fondamentale en médecine, SVT....

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

1a) Démontrer la relation suivante : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$.

1b) Un laboratoire médical veut commercialiser un test de dépistage d'une maladie rare. On note x la proportion d'individus malades au sein de la population totale.

Les résultats d'études statistiques attestent que :

- Si une personne est atteinte par la maladie, le test est positif dans 99 % des cas.
- Si une personne n'est pas atteinte par la maladie, le test est positif dans 0,1 % des cas.

Avant de commercialiser ce test, il est nécessaire de connaître la valeur prédictive positive de ce test, c'est-à-dire la valeur de la probabilité pour que, le test étant positif, la personne dépistée soit réellement atteinte par la maladie.

Nous noterons $f(x)$ la valeur prédictive positive de ce test associée à une proportion x d'individus malades $(0 \leq x \leq 1)$.

Démontrer, en utilisant la question 1a), que $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$

2a) Etudier le sens de variation de f sur $[0\ ;1]$.

2b) On suppose que dans la population, la proportion de personnes malades est de 1 pour 10000.

Quelle est la valeur prédictive positive de ce test ? Que peut-on légitimement penser ?

2c) Quelle devrait être la proportion de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive positive du test soit strictement supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice VII

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

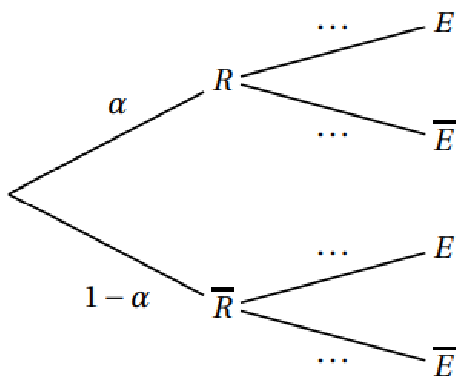
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2. a. Montrer que $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$.
   b. En déduire que : $\alpha = 0{,}4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
   Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
   Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0{,}58$.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.
   c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice VIII

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

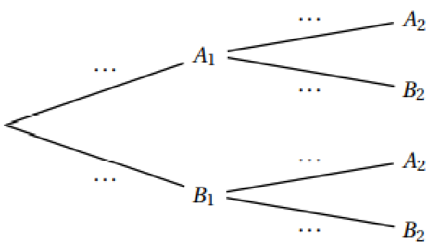
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

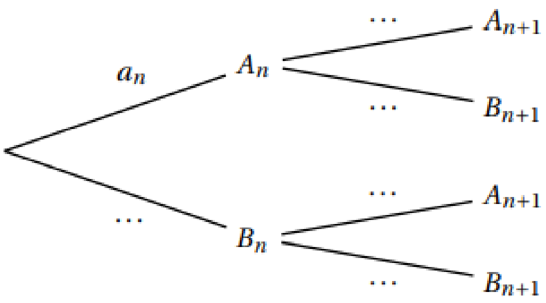
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. **a.** Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

<u>Exercice final et facultatif issu de concours d'entrée en prépa intégrée</u>

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une entreprise décide d'offrir à certains clients qui se connectent sur son site de vente en ligne une remise de 5 euros sur leur prochain achat.

La distribution des bons d'achat est programmée de la manière suivante :

- la probabilité que le premier client connecté obtienne un bon d'achat est $\frac{1}{5}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat, alors le client suivant gagne également un bon d'achat avec une probabilité de $\frac{3}{10}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas de bon d'achat, alors le client suivant ne gagne pas non plus de bon d'achat avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

On considère les événements suivants :

A_n : « le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat de 5 euros »

$\overline{A_n}$: « le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas un bon d'achat de 5 euros ».

On note $a_n = P(A_n)$.

I-1- Donner la valeur de a_1.

I-2- Compléter l'arbre de probabilités donné dans la feuille de réponses.

I-3- Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de a_n.

I-4- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{10}$. Justifier la réponse.

Dans la suite, on pose $u_n = a_n - \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.

I-5-a- Calculer u_1.

I-5-b- Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison q.

I-6-a- Pour tout entier naturel n non nul, en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

I-6-b- Montrer que $a_n = \frac{3}{8\times 5^n} + \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.

I-7- Justifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner sa limite l.

I-8-a- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n > \frac{1}{8}$.

Interprétez la limite obtenue à la question 7) dans le cadre de l'exercice.