Ce travail de synthèse porte sur les suites et limites de suites.

Il est à rendre pour le Mardi 7 Novembre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2,3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot : pas de copie individuelle.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Déterminer dans chaque cas, la limite de la suite (u_n). Préciser dans chaque cas les propriétés utilisées et détailler les calculs :

a) $u_n = 1{,}2^n - 1{,}21^n$. *b)* $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$

2) On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre appelé la factorielle de n, et noté $n!$, comme le produit de tous les entiers compris entre 1 et n inclus.

a) Calculer : $2!$; $3!$; $4!$; $5!$.

b) Expliquer très simplement pourquoi, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a : $n! \geqslant n$.

c) En déduire l'existence et la valeur de : $\lim\limits_{n \to +\infty} n!$.

Exercice II

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.
On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n).
   b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

<u>Exercice III</u>

Faire l'exercice 79 page 219 à l'aide de votre livre numérique.

<u>Exercice IV</u>

Voici un QCM avec justification (questions 1) à 3) et 5) à 8) : déterminer, en justifiant, la bonne réponse parmi celles données à chacune des questions suivantes :

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \ldots, 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

<u>Question 2</u> :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique;
b. (b_n) est géométrique;
c. (a_n) est géométrique;
d. (b_n) est arithmétique.

***Question 3** : les suites de la questions 3) sont utilisées à la question 4).*

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$$

. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Question 4 : cette question n'est pas un QCM :

a) Que retourne en sortie ce programme ?
b) Quelles modifications doit-on y apporter afin qu'il affiche en sortie tous les termes des deux suites de rang inférieur ou égal à un entier n choisi par l'utilisateur ?

5.

Soit k un nombre réel non nul.

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.

On peut affirmer que v_{10} est :

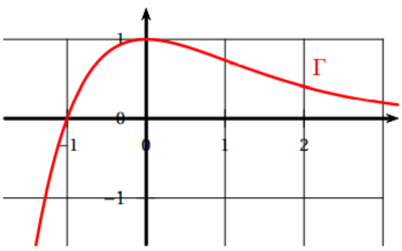
a. positif. **a.** négatif.

c. du signe de k. **d.** du signe de $-k$.

6.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
On note Γ la courbe représentative de f'.
On a tracé ci-contre la courbe Γ.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 .

On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y = x$ **b.** $y = 0$

c. $y = 1$ **d.** $x = 0$

7.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1000} + x$.

On peut affirmer que :

a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.

b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

8.

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge;

b. la suite (u_n) converge;

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice V

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

   a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L?

   b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Exercice VI

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}.$$

   a. Donner v_0.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0{,}5} - 2.$$

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>Les exercices suivants sont facultatifs et permettent de se préparer au post bac.</u>

Exercice VII

Pour tout entier naturel n *non nul*, on définit la suite (u_n) par : $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots .. + \frac{1}{n^2+n}$.

1) Calculer à la main u_1, u_2 et u_3 en donnant les valeurs exactes sous forme fractionnaire.

2) Ecrire u_n à l'aide du symbole Σ.

3) Ecrire un script en python qui pour un entier n non nul du choix de l'utilisateur renvoie en sortie la valeur u_n.

4) Utiliser ce dernier pour faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

5) En encadrer grossièrement u_n (on se posera la question : quel est respectivement le plus petit et plus grand terme de cette somme ?), démontrer que la conjecture effectuée à la question précédente est vraie.

+

A-Exercice 107 page 227 questions *a)*, *b)* et 2) seulement.

B-
1) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$.
2) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Que dire de sa limite ?