Terminale Maths G2 **Devoir à la maison numéro 5** ***Octobre 2022***

***Nota bene* : ce gros travail sur les suites et le calcul de limites est à rendre pour le 10 Novembre.**
Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Déterminer dans chaque cas, la limite de la suite (u_n). Préciser dans chaque cas les propriétés utilisées et détailler les calculs :

a) $u_n = 1{,}2^n - 1{,}21^n$. *b)* $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$

2) On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre appelé la factorielle de n, et noté $n!$, comme le produit de tous les entiers compris entre 1 et n inclus.

a) Calculer : 2! ; 3! ; 4! ; 5!.

b) Expliquer très simplement pourquoi, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a : $n! \geqslant n$.

c) En déduire l'existence et la valeur de : $\lim\limits_{n\to+\infty} n!$

Exercice II

Faire l'exercice 79 page 219 à l'aide de votre livre numérique.

Exercice III

Faire l'exercice 82 page 220 à l'aide de votre livre numérique.

Exercice IV

Voici un QCM avec justification : déterminer, en justifiant, la bonne réponse parmi celles données à chacune des questions suivantes :

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions 2. et 3., on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$$

2. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ; **b.** u_{10} et v_{11} ; **c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d.** u_0 et v_{10}.

4. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel, on a :

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2 ; **b.** converge vers 1 ;
c. diverge vers $+\infty$; **d.** n'a pas de limite.

5.

Soit k un nombre réel non nul.

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.

On peut affirmer que v_{10} est :

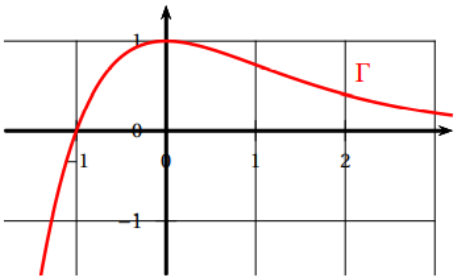
a. positif. **a.** négatif.

c. du signe de k. **d.** du signe de $-k$.

6.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
On note Γ la courbe représentative de f'.
On a tracé ci-contre la courbe Γ.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 .

On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y = x$ **b.** $y = 0$

c. $y = 1$ **d.** $x = 0$

7.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1\,000} + x$.

On peut affirmer que :

a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.

b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

8.

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge ;

b. la suite (u_n) converge ;

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice V

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice VI

Pour tout entier naturel ***n non nul***, on définit la suite (u_n) par : $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots .. + \frac{1}{n^2+n}$.

1) Calculer à la main u_1, u_2 et u_3 en donnant les valeurs exactes sous forme fractionnaire.

2) Ecrire u_n à l'aide du symbole Σ.

3) Ecrire un script en python qui pour un entier n non nul du choix de l'utilisateur renvoie en sortie la valeur u_n.

4) Utiliser ce dernier pour faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

5) En encadrer grossièrement u_n (on se posera la question : quel est respectivement le plus petit et plus grand terme de cette somme), démontrer que la conjecture effectuée à la question précédente est vraie.

Exercice VII

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).
Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2. **a.** Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.
   b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
   c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

Les exercices suivants sont facultatifs et permettent de se préparer au post bac.

A-

Exercice 107 page 227 questions *a)*, *b)* et 2) seulement.

B-

1) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$.

2) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Que dire de sa limite ?