Ce travail est à rendre pour le Jeudi 10 Novembre.

Vous rendrez ce devoir par groupe de trois ou quatre élèves, avec les noms de chacun d'eux sur chacune des copies rendues.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice 1

Dans une population, un individu sur huit a des problèmes de santé.
On sait de plus que parmi les individus ayant des problèmes de santé, deux sur trois consomment trop de sucre, et que 80 % des individus qui consomment trop de sucre ont des problèmes de santé.

Déterminer, en expliquant votre démarche, quelle est la proportion des individus qui ne sont pas malades et qui consomment trop de sucre.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x+6}{2x}$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 2$ et A le point de coordonnées $(-2;3)$. Le point B est un point de l'axe des ordonnées ayant pour ordonnée m.

1. Montrer que l'abscisse x d'un point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite (AB) est solution de l'équation
$$2x^2 - (m+3)x + 4 - 2m = 0.$$
2. Montrer que le discriminant de cette équation est $m^2 + 22m - 23$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et (AB) en fonction de m.

Exercice 4

Dans une usine, trois robots R_1, R_2 et R_3 fabriquent des écrans de téléphone. Les contacts en bord d'écran sont assez délicats et sont contrôlés en fin de chaîne. Lorsqu'un défaut apparaît sur les contacts, l'écran est détruit. Le robot R_1 produit 20 % des écrans de la production avec 1 % de défauts sur les contacts. Le robot R_2 produit 55 % des écrans avec 4 % de défauts et enfin le robot R_3 produit des écrans avec 3,2 % de défauts. On prélève dans la production un écran au hasard.
On pose R_i, l'événement « l'écran est fabriqué par le robot i » et D « l'écran a un défaut ».

1. Déterminer la probabilité qu'un écran soit fabriqué par le robot R_3.

2. Calculer la probabilité qu'un écran ait un défaut sur les contacts. On pourra faire un arbre pondéré pour représenter la situation.

3. R_3 et D sont-ils des événements indépendants ?

4. $R_1 \cup R_2$ et D sont-ils des événements indépendants ?

5. R_1 et D sont-ils des événements indépendants ? R_2 et D ?

Exercice 5

Partie A

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

3. Soit l'événement C « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.

4. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

5. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie B

On dispose d'un second dé cubique B équilibré, présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1.

a. Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 6

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. **a.** Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Exercice 7

Soient A et B deux événements dont la probabilité est strictement comprise entre 0 et 1.

1a) Démontrer la relation suivante : $P_B(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)}$.

1b) Un laboratoire médical veut commercialiser un test de dépistage d'une maladie rare. On note x la proportion d'individus malades au sein de la population totale.

Les résultats d'études statistiques attestent que :

- Si une personne est atteinte par la maladie, le test est positif dans 99 % des cas.
- Si une personne n'est pas atteinte par la maladie, le test est positif dans 0,1 % des cas.

Avant de commercialiser ce test, il est nécessaire de connaître la valeur prédictive positive de ce test, c'est-à-dire la valeur de la probabilité pour que, le test étant positif, la personne dépistée soit réellement atteinte par la maladie.

Nous noterons $f(x)$ la valeur prédictive positive de ce test associée à une proportion x d'individus malades ($0 \leq x \leq 1$).

2a) Démontrer, en utilisant la question 1a), que $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$

2b) On suppose que dans la population, la proportion de personnes malades est de 1 pour 10000.

Quelle est la valeur prédictive positive de ce test ? Que peut-on légitimement penser ?

2c) Quelle devrait être la proportion de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive positive du test soit strictement supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 8

Voici un célèbre jeu américain des années 1960.

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Les questions qui se posent au candidat sont :

1. Que doit-il faire ?
2. Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Répondre à ces questions à l'aide de vos connaissances en probabilités.

Exercice 9

Une roue de loterie est partagée en deux secteurs verts, cinq secteurs blancs, et n secteurs rouges (n entier non nul).

Après avoir misé 10€, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe.

Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère :

- si le secteur repéré est vert, le joueur reçoit 40€.
- si le secteur repéré est blanc, il récupère sa mise.
- si le secteur repéré est rouge, il perd sa mise.

Soit X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_n.

2) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle ce jeu soit équitable ? Justifier.

3) L'organisateur rentre dans ses frais si $E(X_n) \leq -2$.

Déterminer le nombre minimum de cases rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent.

Exercice 10

On lance une pièce de monnaie équilibrée, autant de fois que nécessaires, jusqu'à ce que pile apparaisse <u>deux fois consécutivement</u>. On s'arrête alors.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'arrêt du jeu.

a) Quelle est la valeur minimale prise par X?

b) Décrire, en français, les côtés de la pièce obtenus lorsque $X = 3$, puis calculer $p(X = 3)$.

c) Calculer $p(X = 4)$.

d) Déterminer la probabilité que le jeu s'arrête en au maximum quatre lancers.