Terminale Maths G1 ***Devoir à la maison numéro 3*** ***Octobre 2021***

***Nota bene** : ce travail est à rendre pour le 14 Octobre.*

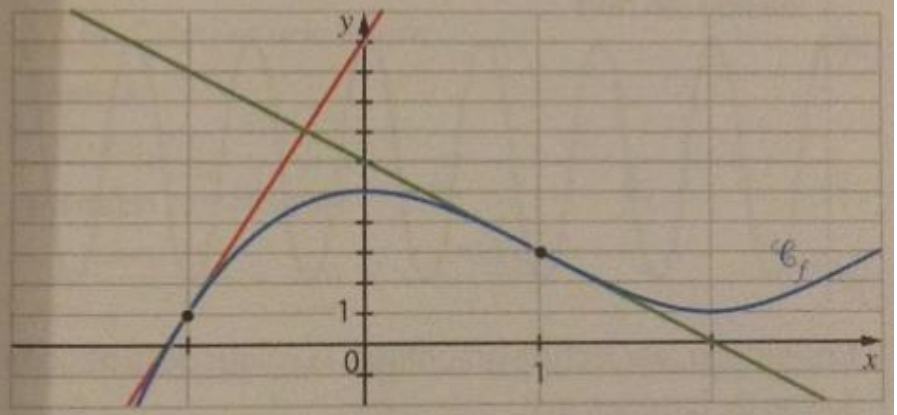
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels, et adopterez une rédaction rigoureuse et concise.

Vous rendrez une copie par groupe de 4 élèves avec les noms figurant sur cette dernière.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses tangentes aux points d'abscisses –1 et 1.



Soit g, h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = f(-x)$, $h(x) = f(2x)$ et $k(x) = f(x-2)$.

1. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de x et à l'aide de f'.
2. Lire sur le graphique les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.
3. En déduire les valeurs de $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0{,}5)$ et $k'(1)$.

Exercice II

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 5x)^4$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2-1}$

c) h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4}}$

d) i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

e) j est définie sur $\mathbb{R}$-{-4} par : $j(x) = e^{\frac{-3x+1}{x+4}}$

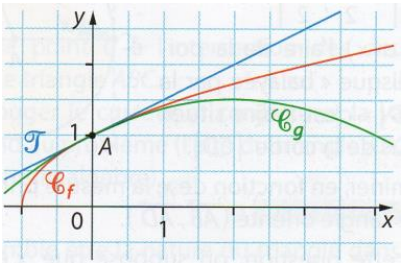
2*a*) Etudier avec soin le sens de variation de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.

2*b*) Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

" Les tangentes à la courbe représentative de f aux points A et B d'abscisses respectives -1 *et* 1 *sont parallèles".*

Exercice III

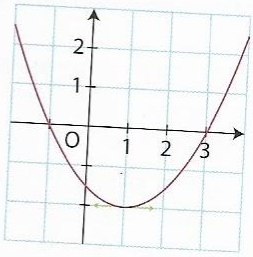
1) On considère les fonctions *f* et *g* définies sur [-1 ; +∞[par : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.



Démontrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions admettent la même tangente au point *A* d'abscisse 0.

Exercice IV

f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la convexité de la fonction *f* lorsque la courbe tracée dans le repère ci-contre est celle :
a) de la fonction *f* ;
b) de la fonction *f'* ;
c) de la fonction *f''*.



Exercice V

Pour tout entier naturel *n* non nul, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 10x^2e^{nx-1}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère.

Montrer que $\mathcal{C}_n$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

Exercice VI

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3 - e^x$.

Démontrer que la courbe représentant *f* est située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice VII

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} + 3x^4$.

a) Montrer que *g* est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant *g* en son point d'abscisse 0.

c) En déduire que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 3x^4 + x - 1$ a sa courbe située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice VIII

Soient K, r et a des constantes strictement positives.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{K}{1+e^{-r(x-a)}}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2) Etudier la convexité de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

Exercice IX

Soit i la fonction inverse définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $i(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note $\mathscr{C}_i$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ du plan.

On se propose de déterminer, parmi tous les points de $\mathscr{C}_i$, s'il en existe un pour lequel la distance OM est la plus petite possible.

1) A l'aide de Geogébra, faire une conjecture sur les coordonnées du point M de la courbe $\mathscr{C}_i$ rendant minimale la distance OM.

2) A l'aide d'une démonstration (une étude de fonction sera nécessaire), démontrer qu'il existe un unique point sur $\mathscr{C}_i$ qui minimise la distance OM. On précisera les coordonnées de ce point, ainsi que la valeur minimale de la longueur OM.

***Exercice X* (*révisions sur les suites*)**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

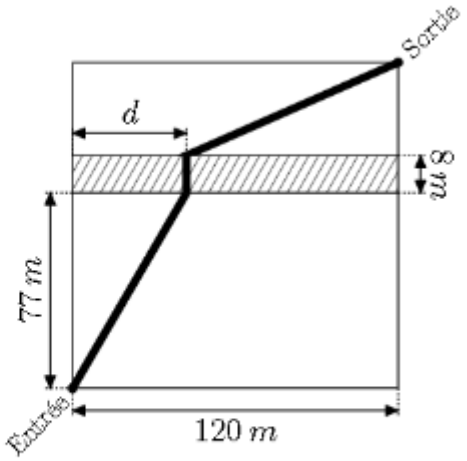
1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

c. En déduire que la conjecture concernant le sens de variation de la suite (u_n) établie à la partie ***A*** est vraie.

***Exercice facultatif* (pré–post bac !)**

La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?