Ce travail de synthèse porte sur les suites et le raisonnement par récurrence.

Il est à rendre pour le Jeudi 12 Octobre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2,3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot : pas de copie individuelle.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

a) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n), puis les comparer aux cinq premiers termes de la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $V_n = n^2 + n - 1$. Quelle conjecture émettez-vous ?

b) En raisonnant par récurrence, déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice II

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ la suite définie par : $u_0 = 150$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 30$.

a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 120$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice III

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3 - 2x^2+x - 2$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n^3 - 2u_n^2 + u_n - 2$

1) Calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2a) Calculer u_1.

2b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, et en se servant des questions précédentes, que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

2c) Qu'en déduisez-vous concernant la suite (u_n) ?

Exercice IV

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

a) Calculer u_1 et u_2, puis à l'aide de la calculatrice donner les dix premiers termes de cette suite sous forme d'un tableau.

b) Quelle conjecture émettez-vous concernant l'expression explicite de u_n en fonction de n ?

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la conjecture précédente est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice V

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
     u=......
     n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.

Exercice VI ***(exercice facultatif, sauf la question c) qui elle est obligatoire).***

u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un produit de fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(uv)' = u'v + uv'$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Indication : on observera pour l'étape d'hérédité, que $(u^{n+1})' = (u^n \times u)'$.

b) *Application* : retrouver la relation donnant la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^n$ où n est entier naturel.

c) *Histoire de réviser utile* : dériver les fonctions suivantes : $g(x) = x^2e^{-x^2}$; $h(x)=e^{-x+\sqrt{x^2+1}}$

Exercice VII

Voici deux fonctions écrites en langage *Python* :

```
def U(n):
    u=7
    for i in range(1,n+1):
        u=10*u-18
    return u
```

```
def V(n):
    v=5*10**n+2
    return v
```

On rappelle qu'en *Python*, * désigne la multiplication, et que ** désigne l'élévation à la puissance.

a) Décrire les suites (u_n) et (v_n) dont ces fonctions *Python* permettent de calculer les termes.

b) Deux élèves remarquent que les valeurs affichées, pour un même entier naturel n saisi, sont identiques pour les deux programmes.

Quelle conjecture peut-on émettre ? A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que cette dernière est vraie pour tout entier naturel n.

Les exercices suivants sont facultatifs et permettent de se préparer au post bac.

Exercice VIII

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : " $2^n \geq (n+1)^2$ ".

a) Démontrer que cette propriété est héréditaire à partir du rang 2.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

c) Conclusion ? Qu'illustre cet exercice ?

Exercice IX

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}$, et telle que, tout entier naturel n, $f(n)$ soit un entier naturel. Démontrer que pour tout entier naturel n, $f(n) \geq n$.

Pour votre culture, f est appelée une extractrice.

Exercice X

Dans cet exercice, vous ferez des figures pour vous aider.

On place n points deux à deux distincts ($n \geqslant 2$) sur un cercle, et on note S_n le nombre total de segments que l'on peut tracer ayant pour extrémités deux de ces points. (De tels segments sont appelés cordes du cercle).

L'objet de cet exercice, est de déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

1a) Déterminer S_2, S_3, S_4 puis S_5.

1b) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n.

1c) Démontrer par récurrence votre conjecture.

Exercice XI ***(MPSI, déjà plus sympathique).***

Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.