Ce travail de synthèse porte sur la dérivation et la convexité, il est à rendre pour le 30 Septembre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$

1. Etudier avec soin le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation.

2. On veut montrer que pour tout réel x, $e^{x^2} \geqslant x^2 + 1$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

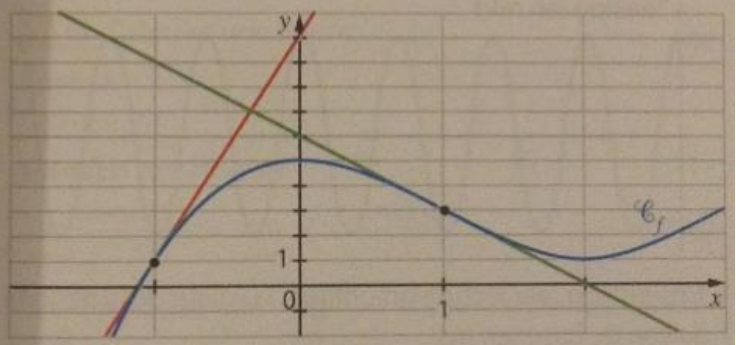
a. Démontrer que pour tout réel x, $h'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Vérifier que $h(0) = 0$, puis conclure quant à la question posée.

Exercice II

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 1.



Soit g, h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = f(-x)$, $h(x) = f(2x)$ et $k(x) = f(x-2)$.

1. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de x et à l'aide de f'.

2. Lire sur le graphique les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.

3. En déduire les valeurs de $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0{,}5)$ et $k'(1)$.

Exercice III

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 5x)^4$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2-1}$

c) h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4}}$

d) i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = xe^{-x}$.

e) j est définie sur $\mathbb{R}$-{-4} par : $j(x) = e^{\frac{-3x+1}{x+4}}$

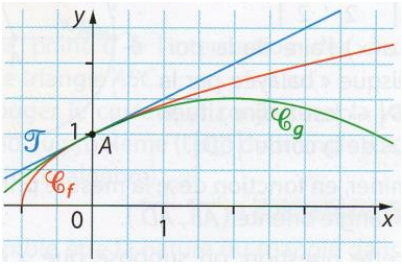
2a) Etudier avec soin le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$

2b) Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

"Les tangentes à la courbe représentative de f aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1 sont parallèles".

Exercice IV

1) On considère les fonctions f et g définies sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.



Démontrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions admettent la même tangente au point A d'abscisse 0.

Exercice V

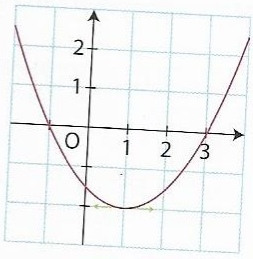
f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la convexité de la fonction f lorsque la courbe tracée dans le repère ci-contre est celle :

a) de la fonction f ;

b) de la fonction f' ;

c) de la fonction f''.



Exercice VI

Pour tout entier naturel n non nul, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 10x^2e^{nx-1}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère.

Montrer que C_n admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

Exercice VII

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3 - e^x$.

Démontrer que la courbe représentant f est située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice VIII

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} + 3x^4$.

a) Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant g en son point d'abscisse 0.

c) En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 3x^4 + x - 1$ a sa courbe située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice IX ***(à ne traiter que si vous vous sentez à l'aise en calcul, facultatif sinon).***

Soient K, r et a des constantes strictement positives.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{K}{1+e^{-r(x-a)}}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2) Etudier la convexité de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

Exercice X ***(à ne traiter que si vous vous comptez faire des études où figurent les mathématiques, facultatif sinon).***

Soit i la fonction inverse définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $i(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note C_i la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ du plan.

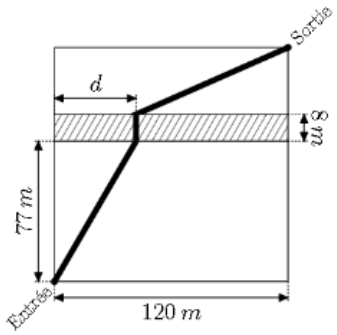
On se propose de déterminer, parmi tous les points de C_i, s'il en existe un pour lequel la distance OM est la plus petite possible.

1) A l'aide de Geogébra, faire une conjecture sur les coordonnées du point M de la courbe C_i rendant minimale la distance OM.

2) A l'aide d'une démonstration (une étude de fonction sera nécessaire), démontrer qu'il existe un unique point sur C_i qui minimise la distance OM. On précisera les coordonnées de ce point, ainsi que la valeur minimale de la longueur OM.

Exercice facultatif ***(pré-post bac !)***

La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?