Seconde 4 — **Devoir à la maison numéro 2** — **Septembre 2023**

Nota bene : Ce travail est à remettre pour le 2 Octobre.

Vous vous mettrez par groupe de deux à quatre élèves, et rendrez alors une seule copie pour le groupe avec le nom de chacun des élèves.
Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

AUCUN RETARD NE SERA TOLERE

Exercice I

Soit x et y deux réels non nuls.

a) Donner dans chaque cas l'expression algébrique correspondante à :

1) le carré de la différence de x et y. 2) la somme du carré de x et du tiers de y.

3) la différence entre le produit de x et y et la somme de x et y.

4) La somme du carré de la différence entre x et y et du double du produit de x et y.

b) Un pavé droit a pour longueur x, pour largeur y, et pour hauteur h. Exprimer en fonction de x, y et h, l'aire totale des faces de ce pavé droit.

Exercice II

1) Développer les expressions suivantes :

$A = 6(2x-1) + (2x+1)(x-3)$; $B = (-3x+2)(-x-2) - (x+5)(x-4)$; $C = 3(2ab - 4ab^2)ab^2$

$D = (7x-2y)^2 + (3x+4y)^2$.

2) Factoriser les expressions suivantes : $E = 2x^2 - x$; $F = 4x - 16$; $G = x^2 - 14x + 49$;

$H = 6x + 14 + (3x+7)^2$; $I = (3x+5)^2 - (x-8)^2$; $J = (x-3)^2 - 16 + (x+1)(x+2)$

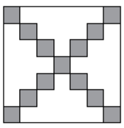
$K = x^2 - \frac{4}{9}a^2$; $L = 10^{n+1} + 10^n$; $M = x^3+x^2+x+1$; $N = 5x(4x-1)+16x^2-1$

2) Développer $(x^2+2)^2$, puis en déduire une factorisation de x^4+4.

Exercice III

Dans un grand carré de 2023 cm de côté, on dessine et on colorie, sur les diagonales du grand carré, des petits carrés de côté 1cm.

Démontrer que la surface restant blanche est le carré d'un nombre entier que l'on déterminera. La figure ci-dessous illustre la situation dans le cas d'un grand carré de côté 7cm :



⇨⇨⇨⇨⇨⇨

Exercice IV

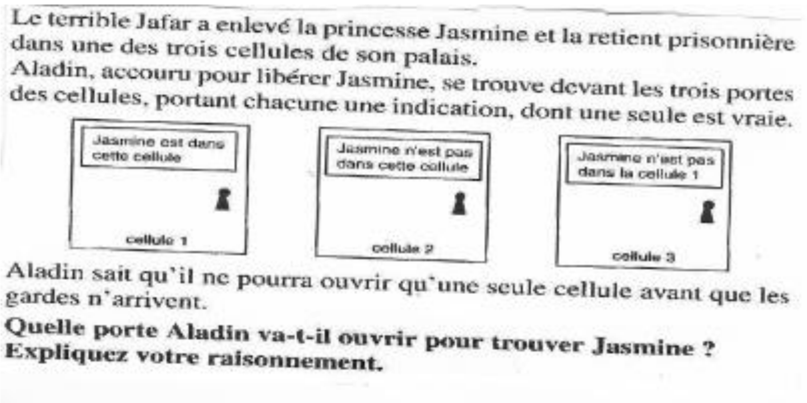
Matt est une brute en calcul mental : demandez-lui de calculer 35^2, il répond instantanément 1225, demandez-lui combien font 75^2 il vous répondra 5625, demandez-lui encore combien font 135^2, il vous répondra 18225, et même 805^2 il vous dira cash : 648025 !
On va essayer de comprendre comment fait *Matt* pour calculer si vite le carré des entiers dont le chiffre des unités est égal à 5.

a) Soit N un entier dont le chiffre des unités est 5 : justifiez pourquoi, on peut trouver un entier, noté d, tel que : $N = 10d + 5$. Que représente concrètement le nombre d vis-à-vis de N?

b) Etablir que $N^2 = 100d(d+1) + 25$.
Expliquez alors l'astuce utilisée par *Matt* pour calculer avec autant d'aisance de tels carrés.

<u>*Application*</u> : expliquez comment vous obtenez mentalement la valeur de 95^2 puis celle de 165^2.

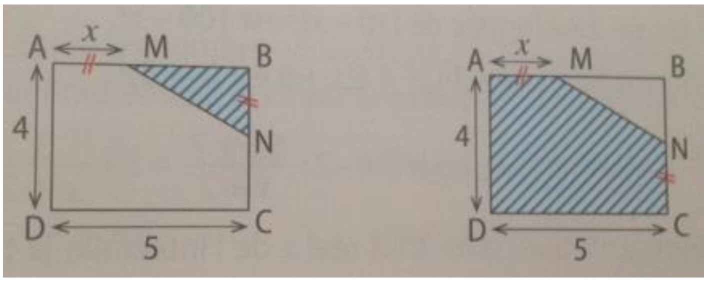
Exercice V *(Pour travailler le raisonnement)*


Le terrible Jafar a enlevé la princesse Jasmine et la retient prisonnière dans une des trois cellules de son palais.
Aladin, accouru pour libérer Jasmine, se trouve devant les trois portes des cellules, portant chacune une indication, dont une seule est vraie.

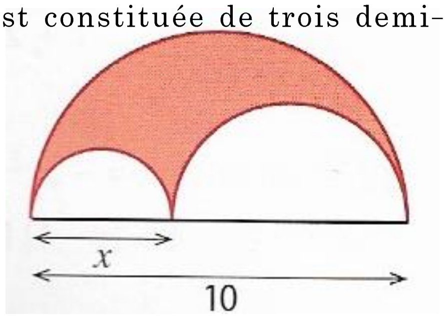
Aladin sait qu'il ne pourra ouvrir qu'une seule cellule avant que les gardes n'arrivent.
Quelle porte Aladin va-t-il ouvrir pour trouver Jasmine ?
Expliquez votre raisonnement.

Exercice VI

1) Exprimer en fonction de x, sous forme développée, dans chacune des deux figures suivantes, l'aire de la zone hachurée en bleu

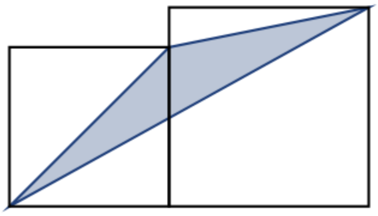


2) La figure suivante est constituée de trois demi-cercles, et x désigne un nombre réel compris entre 0 et 10 :



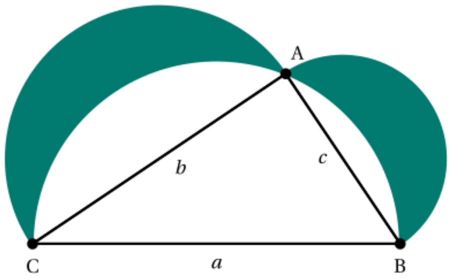
Etablir que le périmètre de la zone colorée ne dépend pas de la valeur de x, et déterminer la valeur exacte de ce périmètre.

3) Deux carrés de côtés 14 et 18 sont tracés côte à côte. Quelle est l'aire du triangle coloré sur la figure ?



4a) Exprimer, en fonction de son diamètre d, l'aire d'un demi-disque de diamètre d.

4b) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = b et AB = c. On a construit un demi-cercle sur chacun de ses côtés pris comme diamètre. On a coloré les croissants compris entre le grand demi-cercle et les deux autres.



Démontrer que l'aire colorée est égale à l'aire du triangle.

4c) ABCD est un carré de centre O et de côté $4cm$. On construit le cercle de centre O et de rayon OA. On l'appelle le cercle circonscrit au carré ABCD.

Déterminer, en justifiant, laquelle des deux figures a la plus grande aire :

Le carré ABCD ou la zone intérieure au disque de centre O et de rayon OA, et extérieure au carré ABCD ?

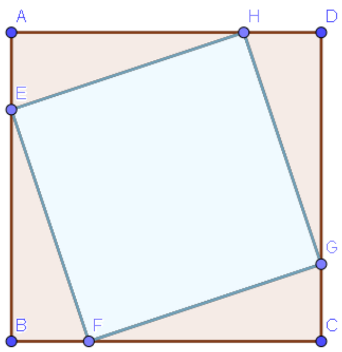
Commencer par faire une figure !

***<u>Exercice facultatif</u>* (une démonstration du théorème de Pythagore)**

Le théorème de Pythagore, que vous utilisez depuis la quatrième, dit que : dans n'importe quel triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

On se propose de justifier d'où sort cette relation.

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré, E est un point du segment $[AB]$, F est un point du segment $[BC]$, G est un point du segment $[CD]$ et H est un point du segment $[AD]$ tels que : $AE = BF = CG = DH = a$, où a est un nombre quelconque positif.



a) Expliquer pourquoi : $EB = FC = GD = HA$. On pose $b = EB = FC = GD = HA$.

b) Que peut-on dire des quatre triangles AEH, HDG, CGF, et EBF ?

c) Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

d) Exprimer en fonction de a et b, l'aire du carré $ABCD$, ainsi que l'aire de chacun des triangles AEH, EBF, CFG et HDG.

e) On note c la longueur des côtés du carré $EFGH$.

Pourquoi a-t-on : $c^2 + 2ab = (a + b)^2$? En déduire le théorème de Pythagore.