Seconde 4 — ***Devoir à la maison numéro 16*** — ***Mai 2023***

***Nota bene* : Ce dernier travail est à remettre pour le 26 Mai.**

Une seule copie pour toute la classe, le chien est fatigué de corriger !

Exercice I

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

1. La somme de deux diviseurs d'un entier divise toujours cet entier.

2. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ est un nombre décimal.

3. pour tout entier n, l'entier $4n + 7$ est impair.

4. Tout entier relatif non nul admet un inverse qui appartient à $\mathbb{Z}$.

5. Pour tous entiers relatifs a, b et c, si a et b divisent c, alors ab divise c.

6. Pour tous entiers relatifs a, b et c, si b est un multiple de a, et c est un multiple de a, alors bc est un multiple de a.

7. Pour tout entier naturel n, si n est un nombre premier, alors l'entier $2n+1$ est également un nombre premier.

Exercice 2

Décomposer en produit de facteurs premiers : 250, puis 642. Rendre irréductibles la fraction $\frac{250}{642}$.

Exercice 3

Soient a, b et d des entiers avec d non nul.

On suppose que d est un diviseur de a et que d est un diviseur de b également.

0) Traduire, en termes de multiples, les phrases :" *d est un diviseur de a*" ; "*d est un diviseur de b*".

1a Démontrer que $a - b$ est un multiple de d. Qu'en déduisez-vous concernant le nombre d ?

1b) En déduire que deux entiers consécutifs quelconques sont premiers entre eux.

1c) Que peut-on dire des fractions de forme $\frac{a}{a+1}$ où a est un entier naturel quelconque ?

Exercice 4

On appelle *triplet Pythagoricien* la donnée de trois nombres entiers a, b et c tels que : $a^2 + b^2 = c^2$.

On notera (a, b, c) un tel triplet.

1) Trouver quelques exemples de *triplets Pythagoriciens*.

2) Un *triplet Pythagoricien* peut-il être constitué de trois nombres impairs ? Justifier.

3) Démontrer que si (a, b, c) est un triplet Pythagoricien, alors, pour tout entier k, le triplet (ka, kb, kc) est également un triplet Pythagoricien. Qu'en déduisez-vous concernant le nombre de triplets Pythagoriciens ?

Exercice 5

Deux nombres premiers sont dits jumeaux lorsqu'ils diffèrent de deux unités.

1a) Citer cinq paires de nombres jumeaux.

1b) Que peut-on dire de la parité de deux nombres jumeaux ? Justifier.

2a) Développer, pour tout entier naturel n, $(n^2+2)^2$. En déduire une factorisation de n^4+4.

2b) Démontrer que le nombre 2023^4+4 n'est pas un nombre premier, et plus généralement, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, n^4+4 n'est jamais un nombre premier.

Exercice 6 (facultatif).

Voici la liste des nombres premiers par tranche de 100 entiers naturels :

De 1 à 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

De 101 à 200:

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

De 201 à 300:

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293

De 301 à 400:

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397

De 401 à 500:

401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499

De 501 à 600:

503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599

De 601 à 700:

601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691

De 701 à 800:

701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797

De 801 à 900:

809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887

De 901 à 1000:

907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

On peut légitimemement conjecturer que figurent dans chacune de ces tranches des nombres premiers, mais qu'ils sont sans doute de moins en moins nombreux.

On se propose de démontrer deux résultats :

i) Qu'il existe une infinité de nombres premiers.

ii) Que l'on peut créer des intervalles de longueur arbitraire ne contenant aucun nombre premier, et donc raréfaction de ces derniers.

Résolution du problème i)

On rappelle que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un nombre fini de nombres premiers :

Soit alors L= {2 ; 3 ; ……..,p_n} la liste finie de ces nombres premiers (que l'on peut ranger par ordre croissant).

Considérons le nombre M égal au produit de tous les éléments de L augmenté de 1 : M = $2\times3\times\ldots\ldots\times p_n + 1$.

a) Expliquer pourquoi M admet au moins un diviseur premier que l'on notera q. Pourquoi ce nombre premier est-il nécessairement dans la liste L ?

b) Expliquer pourquoi q divise $2\times3\times\ldots\ldots\times p_n$.

c) En déduire que q divise M et M – 1, puis que q = 1.

d) Relever une contradiction et conclure quant à l'infinitude de l'ensemble L.

ii) Créer successivement un intervalle de longueur 2, puis de longueur 3, puis de longueur 4, puis de longueur 5 qui ne contient aucun nombre premier.

Essayez de généraliser et de créer un intervalle de longueur x supérieure à 2 ne contenant aucun nombre premier.