***Nota bene* : ce dernier travail sur le calcul intégral est à rendre pour le 1 Juin.**

Les élèves en difficultés, ou ceux qui ne feront pas de mathématiques l'année prochaine, peuvent ne pas rendre ce travail.

Vous pouvez exceptionnellement vous mettre par groupes de cardinal de votre choix.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice 0

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx$; $K = \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\, dx$ (faire deux IPP consécutives pour K).

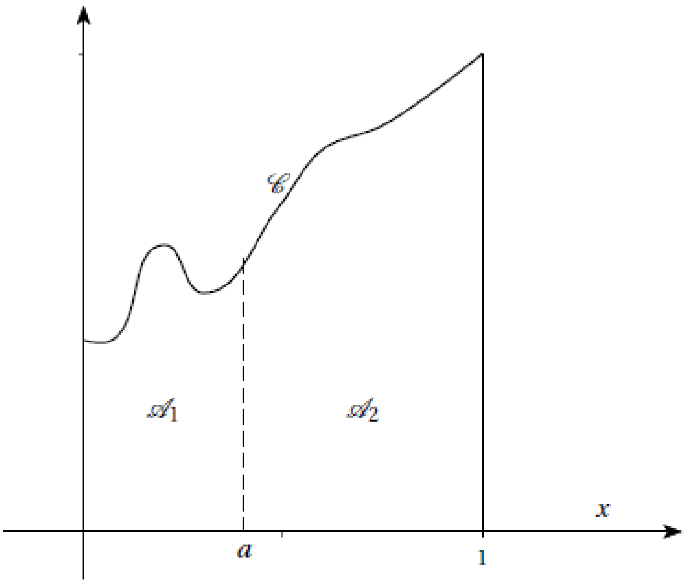
Exercice 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :

— $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :

— $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.

— $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

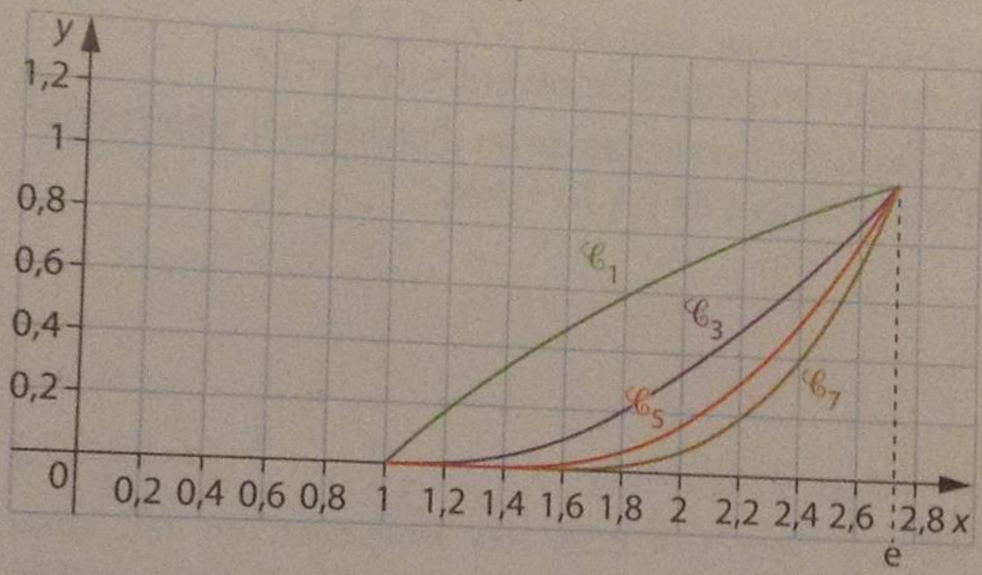
Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
   a. f est une fonction constante strictement positive.
   b. f est définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x$.
2. **a.** À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
   b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
   a. La fonction f est définie pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
   Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
   b. La fonction f définie pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
   Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Exercice 2

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la suite (u_n) par : $u_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. On a tracé sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ les courbes $\mathscr{C}_n$ d'équations $y = (\ln x)^n$ pour $n = 1, 3, 5$ et 7.



Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) ?

2. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ ont deux points communs pour n entier naturel non nul.

3. Étudier pour $n \geqslant 1$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Qu'en déduit-on ?

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est positive ou nulle.

5. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$.

6. En déduire que la limite de (u_n) n'est pas strictement positive, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. **a.** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 ***(bombe atomique)***

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \; f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 5 (facultatif)

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;\,+\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.

2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.

6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0\,;\,a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.