***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 6 Mai. Il fait une synthèse sur le calcul intégral et fait revoir quelques autres points pour le baccalauréat.**

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice 0

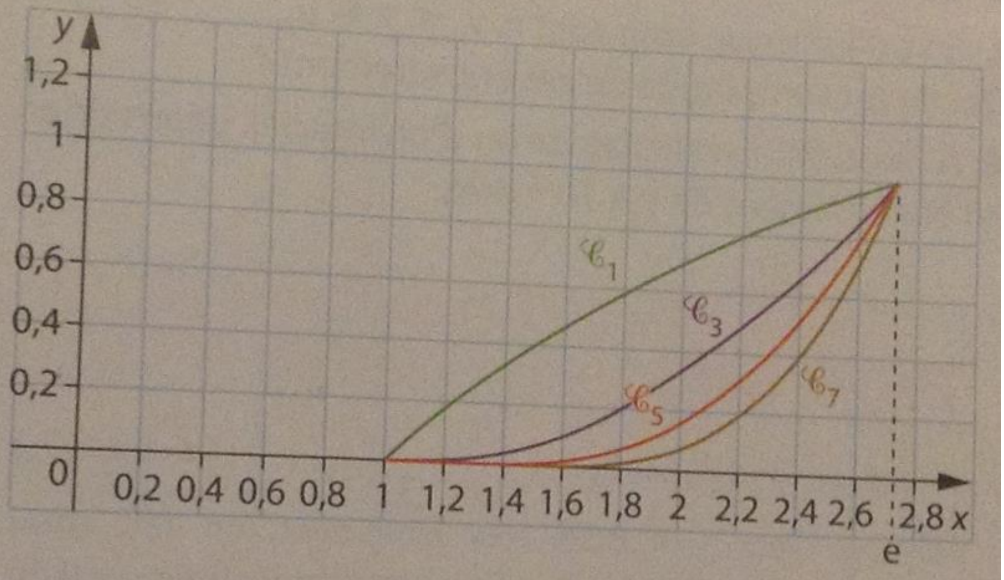
Calculer les intégrales suivantes :

A = $\int_0^1 xe^{-2x}dx$; I = $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; J = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$; K = $\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx$ (faire deux IPP consécutives pour K).

Exercice 1

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la suite (u_n) par : $u_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. On a tracé sur [1 ; e] les courbes $\mathscr{C}_n$ d'équations $y = (\ln x)^n$ pour $n = 1, 3, 5$ et 7.



Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) ?

2. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont deux points communs pour n entier naturel non nul.

3. Étudier pour $n \geqslant 1$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Qu'en déduit-on ?

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est positive ou nulle.

5. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, :

$u_{n+1} = e - (n+1)u_n$.

6. En déduire que la limite de (u_n) n'est pas strictement positive, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 2</u>

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

0) Etudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, et déterminer en justifiant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Construire son tableau de variation.

1) Matt est un esthète : il souhaite créer un domaine sous la courbe de cette fonction d'aire égale à celle d'un disque *de rayon* 1*,* ce domaine s'appuyant entre les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \lambda$. Déterminer la valeur du réel $\lambda > 1$ pour qu'il en soit ainsi.

2) Matt est aussi un matheux : il se pose la question de savoir si le domaine noté D_a situé sous la courbe entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ admet une aire finie lorsque a tend vers $+\infty$. L'aider à résoudre ce problème. Ce résultat est-il contraire à votre intuition et au fait que la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$?

3*a*) Etudier la position relative de la courbe représentative de f et de l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Représenter puis calculer l'aire du domaine $\mathfrak{D}$ formé par l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ du plan tels que : $e \leq x \leq e^2$ et $\dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par :

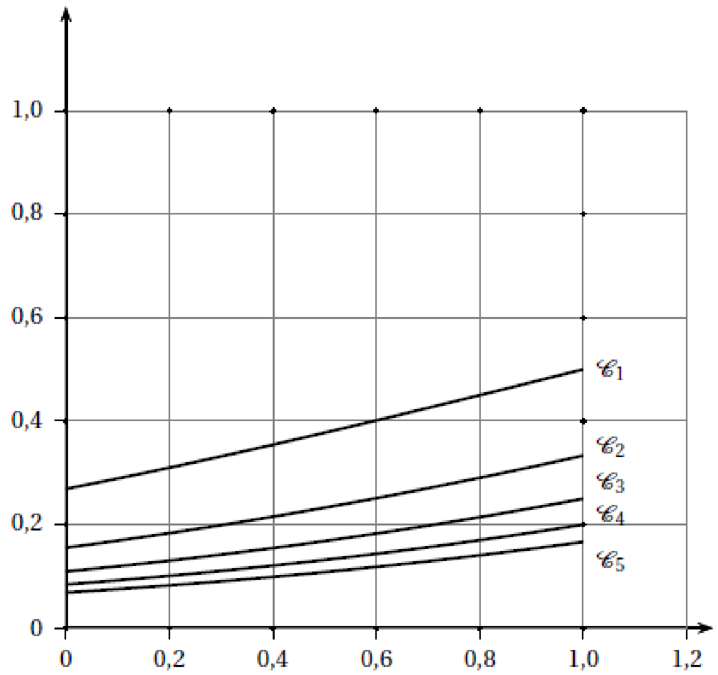
$$f_n(x) = \frac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?*

Annexe à l'exercice 3



Exercice 4 ***(bombe atomique)***

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \; f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 4 ***(facultatif # je me prépare comme un bâtard au post bac)***

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. **a.** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 ***(facultatif)***

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;\,+\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0\ ;\ a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.