Terminale Maths Groupe2 — ***Devoir à la maison numéro 14*** — ***Avril 2023***

***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 11 Mai. Vous rendrez *un seul lot* de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec *les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe* sur *chaque copie du lot*.**

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la c[illegible]n de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

***Exercice I* (issu de concours d'entrée aux grandes écoles, banque Agro-Véto) : seuls les élèves faisant prépa l'an prochain et les curieux le cherchent, facultatif sinon.**

On étudie une espèce de lièvres dont on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population.

***Partie 1* : Modélisation de la dynamique d'une population isolée**

La variable t désigne le temps, et Y(t) l'effectif des lièvres à l'instant t.

On suppose pour commencer que la population est isolée, dans un environnement aux ressources abondantes.

On modélise la dynamique de population des lièvres par l'équation différentielle suivante notée (E) : $Y' = rY$ où r désigne une constante strictement positive représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1a) Résoudre l'équation différentielle (E) sachant qu'initialement il y a N lièvres dans la population, où N est un entier naturel strictement positif.

1b) Dessiner sommairement l'allure de la courbe de la fonction solution de (E).

1c) Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres selon ce modèle ? L'équation différentielle (E) est-elle une modélisation raisonnable ? Justifier.

***Partie 2* : Autre modélisation**

On suppose à présent que les ressources du milieu naturel sont limitées, et on modélise la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle (F) suivante : $Y' = rY\left(1 - \frac{Y}{K}\right)$, où K est une constante entière strictement positive.

2a) Soit f la solution de (F) avec la condition initiale $f(0) = N$. On admet que pour tour réel $t \geqslant 0$, $f(t) > 0$, et on définit la fonction z sur $[0\ ;+\infty[$ par : $z(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Montrer que z est solution de l'équation différentielle (E_2) : $z' = \frac{r}{K} - rz$.

2b) Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $z' = \frac{r}{K} - rz$. On exprimera la solution en fonction de t, r, K et N.

2c) En déduire de $f(t)$ en fonction de t, r, K et N.

2d) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

2e) Donner l'allure de la courbe de f, pour une condition initiale N petite et positive, puis pour $N > K$ d'autre part.

2f) En s'appuyant sur les réponses aux questions précédentes, décrire les différences entre les modèles (E) et (F), et donner une interprétation biologique de la constante K.

Exercice II

On prendra pour durée d'une année 365 jours.

1) Dans une classe de 23 élèves, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves qui aient la même date d'anniversaire (indépendamment de l'année de naissance).

Donner la valeur exacte à l'aide de factorielles, puis une valeur approchée au centième près (utiliser Python, votre calculatrice risque d'être en dépassement de capacité sinon).

2) Reprendre cette question avec une classe de 30 élèves, puis une autre classe de 35 élèves, puis une assemblée de 50 personnes.

Ces résultats vous surprennent-ils ?

Exercice III ***(pour travailler le dénombrement)***

Exercice numéro 47 page 68 du livre.

Exercice numéro 27 page 65 du livre.

Exercice numéro 33 page 66 du livre.

Exercice numéro 41 page 67 du livre.

Exercice numéro 70 page 72 du livre.

Exercice numéro 72 page 72 du livre.

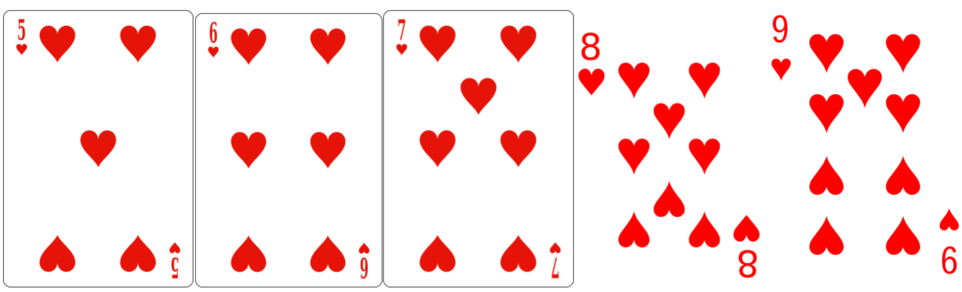
Exercice numéro 84 page 43 du livre.

Exercice IV ***(peut faire un thème de développement au grand oral)***

Exercice numéro 45 page 67 du livre plus :

4) Toujours dans le cadre du poker, on appelle *quinte flush, 5* cartes consécutives d'une même famille.

Par exemple, la main suivante est une *quinte flush* :



Déterminer le nombre de *quintes flush* que l'on peut former, puis la probabilité d'avoir une *quinte flush* entre les mains.

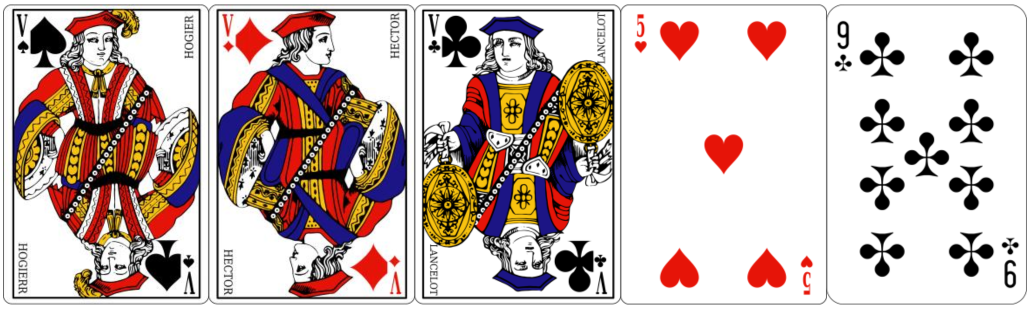
5) Un *full* est une main de 5 cartes constituée de trois cartes de la même valeur et de deux cartes d'une autre valeur.

<u>Exemple de full</u> :

Dénombrer le nombre de mains formant un *full*, puis la probabilité d'avoir un *full* entre ses mains.

6) Un *brelan* est une main de cinq cartes, constituée de trois cartes de la même valeur, et de deux autres cartes ne formant ni un carré ni un *full* avec les trois cartes de même valeur.

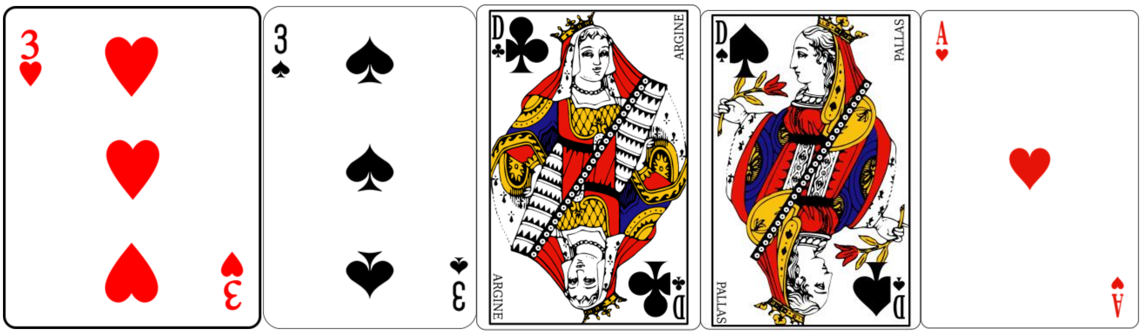
<u>Exemple de brelan</u> :



Dénombrer les mains formant un *brelan*, puis déterminer la probabilité d'avoir un *brelan* entre ses mains.

7) On appelle double paire, deux fois deux cartes de même valeur, ne formant pas avec les autres cartes un *full.*

<u>Exemple de double paire</u> :



Dénombrer les mains contenant une double paire, puis déterminer la probabilité d'avoir une double paire entre ses mains.

Exercice V

n désigne un entier naturel non nul.

Soit E = $\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

Soit σ (sigma minuscule) une permutation des éléments de E, c'est à dire une application ***bijective*** de E dans E, c'est-à-dire une application telle que ***chaque élément de E soit l'image d'un <u>unique</u> élément de E par σ.***

On notera σ sous la forme : $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots & x_n \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \ldots\ldots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

Par exemple, si $n = 3$ et E = {1 ; 2 ; 3}, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la permutation de E définie par :

$\sigma(1) = 2$; $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 3$.

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une autre permutation de E définie par : $\sigma'(1) = 3$; $\sigma'(2) = 1$ et $\sigma'(3) = 2$.

Dans un ensemble de cardinal n, il y a donc $n!$ permutations (*cf.* cours).

On appelle ***point fixe*** d'une permutation σ de E tout élément de E ***qui est invariant (ne change pas de valeur)*** en lui appliquant σ.

L'élément x_k de E est un point fixe pour σ lorsque $\sigma(x_k) = x_k$.

Par exemple, pour la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 3 est l'unique point fixe pour σ.

La permutation $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'admet aucun point fixe.

Enfin, on appelle ***<u>dérangement</u> (de E)***, ***toute <u>permutation de E n'ayant aucun point fixe</u>***.

C'est par exemple le cas de $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On notera D_n le nombre de dérangements de E, lorsque E est un ensemble de cardinal n, en convenant que $D_0 = 1$.

1a) Pourquoi $D_1 = 0$?

1b) Dresser la liste des permutations d'un ensemble de cardinal 2, puis déterminer la valeur de D_2.

1c) Déterminer de même la valeur de D_3.

2a) Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$, et soit u_k le nombre de permutation de E ayant k points fixes.

Etablir que $u_k = \binom{n}{k} \times D_{n-k}$.

2b) En déduire l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times D_{n-k} = n!$

2c) Déterminer alors successivement les valeurs : D_4 ; D_5 ; D_6 ; D_7 ; D_8 ; D_9 et D_{10}.

3) Application intéressante

10 personnes participent à une fête, chacune est venue avec un chapeau.

En partant, chacune prend au hasard un chapeau.

Déterminer la probabilité qu'aucune des personnes ne reparte avec le chapeau avec lequel elle était arrivée. Arrondir à 0,01 près.

Comparer la valeur de cette probabilité à celle de l'événement : ***"au moins une des personnes repart avec le chapeau avec lequel elle était arrivée"***.

Les exercices 6 et 7 sont facultatifs mais recommandés aux élèves voulant aller en prépa.

Exercice VI

Soient n et m deux entiers naturels non nuls.

E est un ensemble à n éléments, et F est un ensemble à m éléments, tels que E et F sont disjoints.

Démontrer, par le dénombrement, que pour tout entier r tel que : $0 \leq r \leq n+m$, on a l'identité suivante :

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

Exercice VII

Exercice numéro 82 page 75 du livre plus :

5a) De combien de façons peut-on partitionner un ensemble à 9 éléments en paires ?

5b) De combien de façons peut-on partitionner un ensemble à 8 éléments en paires ?

5c) De combien de façon peut-on partitionner un ensemble à $2n$ éléments en paires ? Compacter la formule obtenue sous forme de produit.