<u>Nota bene</u> : ce travail est à rendre pour le 5 Avril. Il fait une synthèse sur le chapitre dénombrement.

Vous rendrez <u>un seul lot</u> de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec <u>les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe</u> sur <u>chaque copie du lot</u>.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

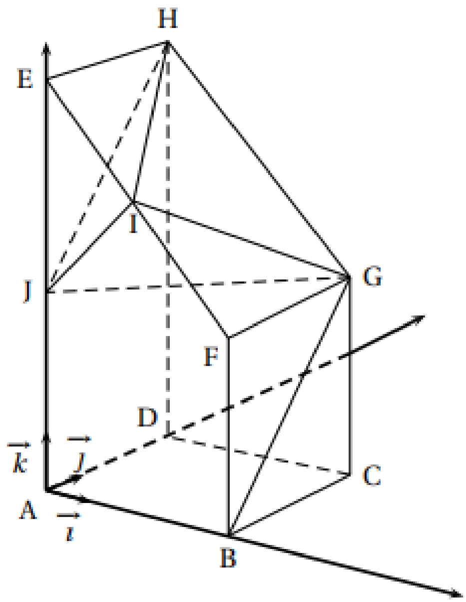
Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

<u>Exercice I</u>

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Exercice II ***(pour travailler le dénombrement)***

Exercice numéro 47 page 68 du livre.

47 Le Kinball est un sport dans lequel plusieurs équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger une équipe adverse à laisser tomber le ballon au sol. Dans ce sport, tous les joueurs d'une équipe ont le même rôle.

Alice entraine un club de Kinball qui compte 42 adhérents. Avant un championnat, elle doit choisir 10 personnes qui y participeront.

1. Combien de choix possibles s'offrent à Alice pour cette sélection de 10 joueurs ?

2. Parmi les 42 adhérents, il y a 22 filles et 20 garçons. Combien Alice a-t-elle de choix possibles pour une équipe :

a) qui ne comporte que des filles ?

b) qui comporte un seul garçon ?

c) qui comporte autant de garçons que de filles ?

d) qui comporte deux garçons de plus que de filles ?

Exercice numéro 27 page 65 du livre.

27 La séquence d'un brin d'ADN est la succession des nucléotides qui le constituent. Ces nucléotides sont notés A (adénine), C (cytosine), G (guanine) et T (thymine).

a) Combien y a-t-il de séquences de deux nucléotides différents possibles ?

b) Lister toutes ces séquences de deux nucléotides.

c) Donner le nombre de séquences de trois, puis de quatre, nucléotides différents.

Exercice numéro 33 page 66 du livre.

33 Une classe de 12 élèves rassemble 7 filles et 5 garçons. Un professeur range les copies de ces 12 élèves dans un ordre aléatoire.

a) Combien y a-t-il de façons de ranger ces copies ?

b) Combien y a-t-il de façons de ranger les copies en commençant par les copies des filles ?

c) Si on commence par les copies des garçons, cela modifie-t-il le nombre de façons de ranger les copies ?

Exercice numéro 41 page 67 du livre.

41 Dans un lycée, les 36 délégués de classe doivent élire un comité de trois élèves.

1. On suppose que les trois élèves ont le même rôle.

a) Combien y a-t-il de comités différents possibles ?

b) On sait de plus que, parmi les délégués, 20 sont des filles et 16 sont des garçons.
Calculer le nombre de comités possibles dans lesquels il y a davantage de filles que de garçons.

2. On suppose que les trois élèves du comité peuvent être président, adjoint, secrétaire.
Reprendre alors les questions **a)** et **b)** de 1.

Exercice numéro 70 page 72 du livre.

70 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.

a) Exprimer en fonction de n le nombre de tirages possibles.

b) p désigne un nombre entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Démontrer que le nombre de tirages avec exactement p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) En déduire la somme : $S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$.

Exercice numéro 72 page 72 du livre.

72 Dans un lycée, une classe de 32 élèves (20 filles et 12 garçons) doit être dédoublée pour les cours de sciences.
On doit donc constituer un groupe de 16, que l'on appelle groupe A, l'autre groupe étant alors constitué des élèves restants.
Marina affirme : « Il y a une chance sur deux que le groupe A comporte autant de filles que de garçons ».
A-t-elle raison ? Justifier.

Exercice numéro 84 page 43 du livre.

84 **Prendre des initiatives**

Chercher Modéliser Calculer

On appelle mot tout assemblage ordonné de lettres de l'alphabet français, qu'il ait un sens ou non. À l'aide uniquement des lettres du mot MOULINS, combien peut-on écrire de mots de quatre lettres distinctes dont l'une des lettres est N ?

Exercice IV **(*peut fournir des idées pour un thème de développement au grand oral*)**

Attention : On prend un jeu de poker constitué de 52 cartes usuelles.

Exercice numéro 45 page 67 du livre plus :

45 Au poker, on utilise un jeu de cinquante-deux cartes : treize valeurs (du 1 au 10 puis valet, dame, roi) en quatre familles (Cœur, Carreau, Pique, Trèfle).
Une main est un ensemble de 5 cartes différentes.

1. Combien de mains différentes peut recevoir un joueur ?

2. Une couleur est constituée de 5 cartes de la même famille.

a) Combien y a-t-il de mains de ce type en Cœur ?

b) Combien y a-t-il de mains de ce type en tout ?

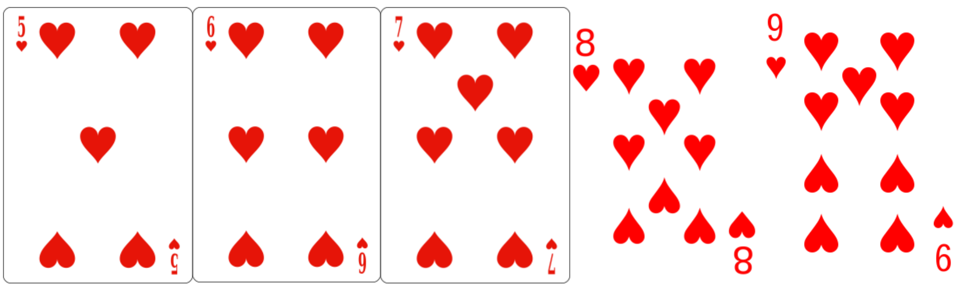
3. Un carré est une main composée de 4 cartes de la même valeur et d'une cinquième carte quelconque.

a) En considérant la cinquième carte, déterminer combien de carrés présentent le numéro 10 répété quatre fois ?

b) Combien y a-t-il de carrés en tout ?

4) Toujours dans le cadre du poker, on appelle *quinte flush,* 5 cartes consécutives d'une même famille.

Par exemple, la main suivante est une *quinte flush* :



Déterminer le nombre de *quintes flush* que l'on peut former, puis la probabilité d'avoir une *quinte flush* entre les mains.

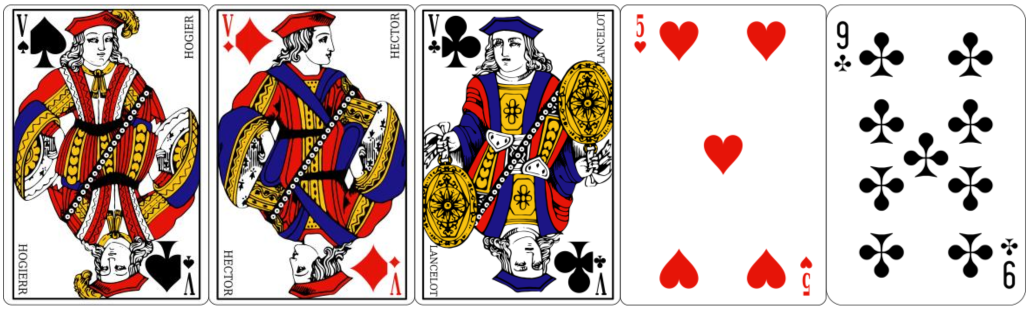
5) Un *full* est une main de 5 cartes constituée de trois cartes de la même valeur et de deux cartes d'une autre valeur.

__Exemple de full__ :

Dénombrer le nombre de mains formant un *full*, puis la probabilité d'avoir un *full* entre ses mains.

6) Un *brelan* est une main de cinq cartes, constituée de trois cartes de la même valeur, et de deux autres cartes ne formant ni un carré ni un *full* avec les trois cartes de même valeur.

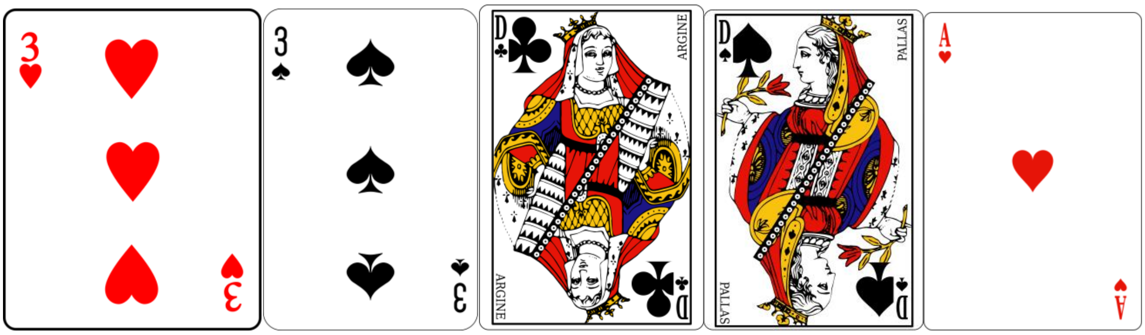
__Exemple de brelan__ :



Dénombrer les mains formant un *brelan*, puis déterminer la probabilité d'avoir un *brelan* entre ses mains.

7) On appelle double paire, deux fois deux cartes de même valeur, ne formant pas avec les autres cartes un *full.*

__Exemple de double paire__ :



Dénombrer les mains contenant une double paire, puis déterminer la probabilité d'avoir une double paire entre ses mains.

__Exercice V__(peut fournir des idées pour un beau thème de développement au grand oral, surtout l'application sur les chapeaux)

n désigne un entier naturel non nul.

Soit E = $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

Soit σ (sigma minuscule) une permutation des éléments de E, c'est à dire une application ***bijective*** de E dans E, c'est-à-dire une application telle que ***chaque élément de E soit l'image d'un unique élément de E par σ.***

On notera σ sous la forme : $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots\cdots & x_n \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \cdots\cdots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

Par exemple, si $n = 3$ et E $= \{1\ ;2\ ;3\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la permutation de E définie par :

$\sigma(1) = 2$; $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 3$.

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une autre permutation de E définie par : $\sigma'(1) = 3$; $\sigma'(2) = 1$ et $\sigma'(3) = 2$.

Dans un ensemble de cardinal n, il y a donc $n!$ permutations (*cf.* cours).

On appelle ***point fixe*** d'une permutation σ de E tout élément de E ***qui est invariant (ne change pas de valeur)*** en lui appliquant σ.

L'élément x_k de E est un point fixe pour σ lorsque $\sigma(x_k) = x_k$.

Par exemple, pour la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 3 est l'unique point fixe pour σ.

La permutation $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'admet aucun point fixe.

Enfin, on appelle ***<u>dérangement</u>* (*de E*)**, ***toute <u>permutation de E n'ayant aucun point fixe</u>***.

C'est par exemple le cas de $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On notera D_n le nombre de dérangements de E, lorsque E est un ensemble de cardinal n, en convenant que $D_0 = 1$.

1*a*) Pourquoi $D_1 = 0$?

1*b*) Dresser la liste des permutations d'un ensemble de cardinal 2, puis déterminer la valeur de D_2.

1*c*) Déterminer de même la valeur de D_3.

2*a*) Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$, et soit u_k le nombre de permutation de E ayant k points fixes.

Etablir que $u_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times D_{n-k}$.

2*b*) En déduire l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times D_{n-k}=n!$

2*c*) Déterminer alors successivement les valeurs : D_4 ; D_5 ; D_6 ; D_7 ; D_8 ; D_9 et D_{10}.

3) ***<u>Application intéressante</u>***

10 personnes participent à une teuf, chacune est venue avec un chapeau.

En partant, chacune prend au hasard un chapeau.

Déterminer la probabilité qu'aucune des personnes ne reparte avec le chapeau avec lequel elle était arrivée. Arrondir à 0,01 près.

Comparer la valeur de cette probabilité à celle de l'événement : ***"au moins une des personnes repart avec le chapeau avec lequel elle était arrivée".***

<u>Exercice VI</u> **(*les 3 questions sont indépendantes*)**

a) Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que le produit de p entiers consécutifs est toujours divisible par p !

b) Quel est le cardinal de l'ensemble : $\{(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in\mathbb{N}^p \mid 1\leq x_1<x_2<\cdots<x_p\leq n\}$

c) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\binom{2n}{n}$. Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

<u>Les exercices 7 et 8 et 9 sont facultatifs et recommandés aux élèves voulant aller en prépa.</u>

<u>Exercice VII</u>

Soient n et m deux entiers naturels non nuls.

E est un ensemble à n éléments, et F est un ensemble à m éléments, tels que E et F sont disjoints.

Démontrer, par le dénombrement, que pour tout entier r tel que : $0\leq r\leq n+m$, on a l'identité suivante :

$$\binom{n+m}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

<u>Exercice VIII</u>

Exercice numéro 82 page 75 du livre plus :

5*a*) De combien de façons peut-on partitionner un ensemble à 9 éléments en paires ?

5*b*) De combien de façons peut-on partitionner un ensemble à 8 éléments en paires ?

5*c*) De combien de façon peut-on partitionner un ensemble à 2*n* éléments en paires ? Compacter la formule obtenue sous forme de produit.

5*d*) Dans une classe de 30 élèves, de combien de façons différentes peut-on répartir ces élèves par binômes ?

Exercice IX

Montrer, pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ avec $1 \leq p \leq q$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \frac{p}{q-p+1}$.