

Nota bene : ce travail est à rendre pour le 26 Avril. Il fait une synthèse sur le chapitre primitives et équations différentielles.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I (calculs tout en finesse de primitives)

- 1) Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I .

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}; F(x) = x - \ln(1+e^x); I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}; F(x) = \ln(\ln x); I =]1; +\infty[$$

- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

Déterminer la primitive F de f sur \mathbb{R} qui vérifie : $F(0) = 1$.

- 3) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0,2x^2 + \frac{2}{7}x - 11 \quad ; \quad g(x) = 5\sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x} \quad ;$$

- 4) Exercices numéro : 56 page 383 du livre ; 41 b) seulement page 382 ; 42 b) page 382 ; 45 page 382
53 page 383 ; 48 b) page 383 ; 50 page 383

- 5) f est la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ par : $f(x) = \tan(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) Vérifier que $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

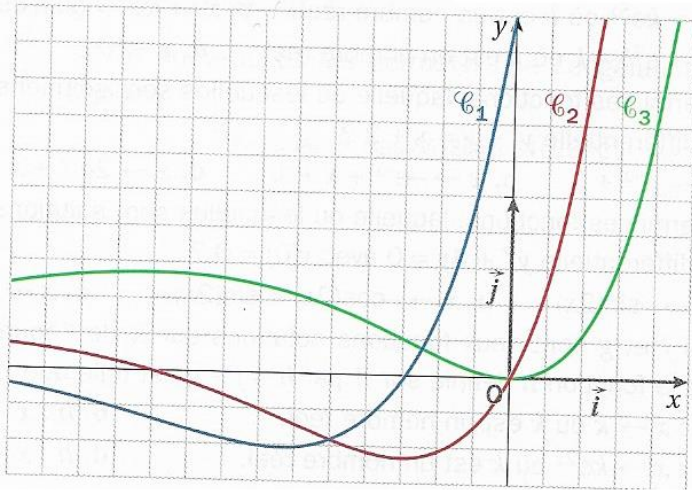
- b) En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ par : $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ et qui s'annule en 0.

- c) En déduire les primitives de la fonction h définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ par : $h(x) = \tan^2(x)$.

Exercice III

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois fonctions sur un intervalle I : f , sa dérivée f' et une de ses primitives F .

Identifier, en justifiant, chacune de des courbes.



Exercice IV

Exercices : 72 page 384 ; 75 page 384 ; 78 page 384 ; 81 page 384.

Exercice V

Une étude s'intéresse au nombre de foyers possédant un écran plat à partir de l'an 2005.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de foyers avec écran plat l'année $2025 + x$.

L'étude commence en 2005 : $x = 0$ correspond à l'année 2005.

En 2005, il y avait un million de foyers avec écran plat.

0) Que vaut $g(0)$?

On admet que g ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, et que g est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : $(E) : y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
- a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

- b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Exercice VI

On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- La fonction h est définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} .
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .
- On considère une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
- En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
- Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

Exercice VII

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20 e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = ax e^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8) e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x) e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- b.** En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

- a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14; 15]$.
- b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```

from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
    
```

- c. Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question?