Nota bene : ce travail est à rendre pour le 19 Mars. Il fait une synthèse sur le chapitre espace partie II.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

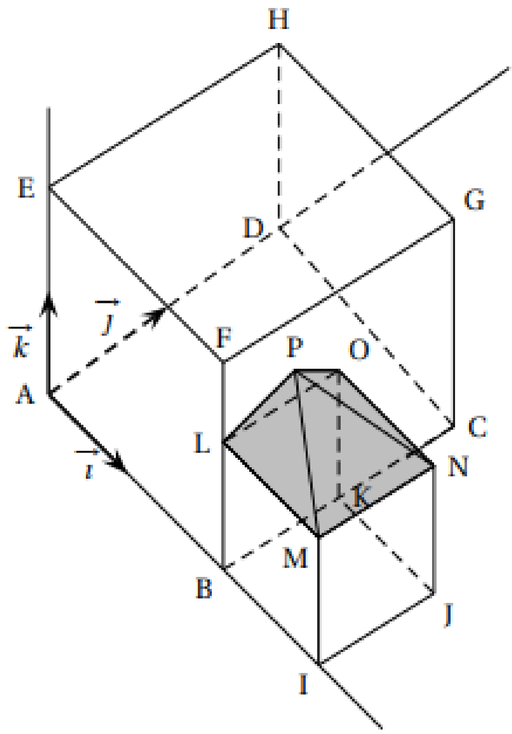
On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice II

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$.
3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$.
   b. Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

Exercice III

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(1\,;\,0\,;\,-1),\quad B(3\,;\,-1\,;\,2),\quad C(2\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et}\quad D(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 2+t\\ z &=& -1+t\end{array}\right., \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
   b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D?
   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x+y-z-3=0$.
2. **a.** Calculer la distance CD.
   b. Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$ différent de C vérifiant $MD=\sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
   b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
   c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-3\,;\,2),\qquad B(3\,;\,-2\,;\,6)\quad \text{et}\quad C(1\,;\,2\,;\,-4).$$

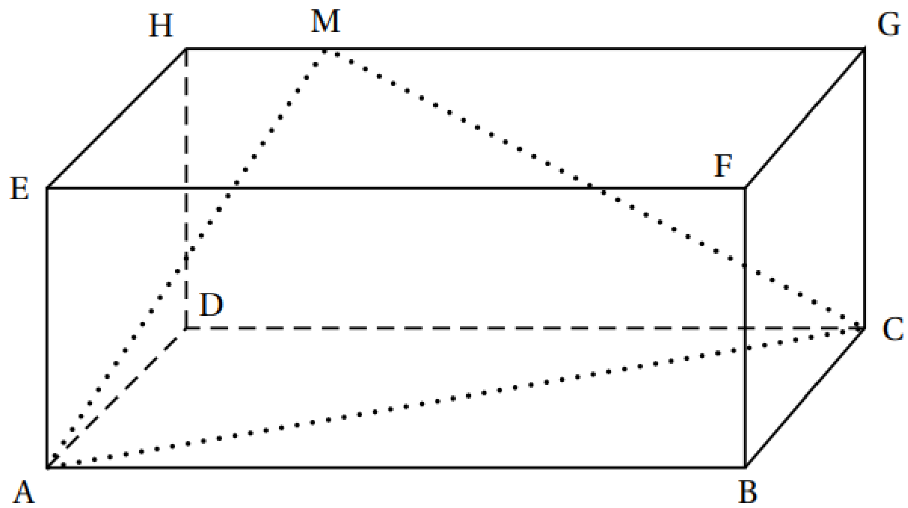
1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $F(15\,;\,-16\,;\,-8)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
   Démontrer que le point E a pour coordonnées $(2; 0; 1)$.
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que
$AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5\,;0\,;0)$, $(0\,;3\,;0)$ et $(0\,;0\,;2)$.



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,; 1]$.
   a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,; 3\,; 2)$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
   c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

***Exercice* VI**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J, K)$.
On considère les points

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0),\ B(6\,;\,-5\,;\,1),\ C(1\,;\,2\,;\,-2) \text{ et } S(13\,;\,37\,;\,54).$$

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b. Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. **a.** Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

   b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
   Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.