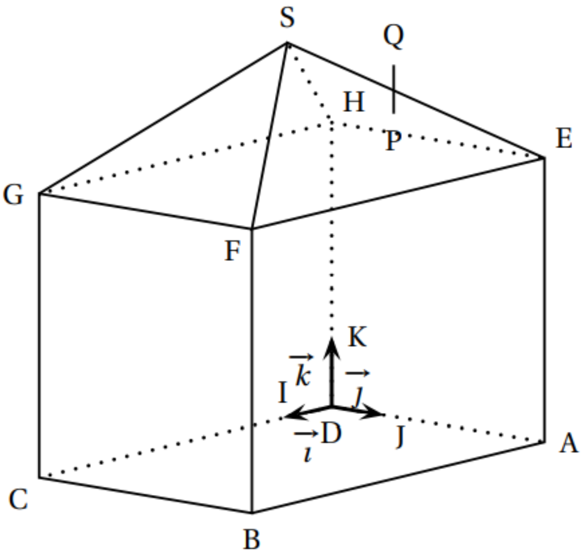
Nota bene ***: ce travail est à rendre pour le 16 Mars. Vous rendrez*** ***un seul lot*** ***de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec*** ***les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe*** ***sur*** ***chaque copie du lot***.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la c[illegible]n de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.
On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.
Soit les points I, J et K tels que
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS);
- le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5{,}5+t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4+6s \\ y & = & 7-4s \\ z & = & 2+4s \end{array}\right. \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

Exercice II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$;

b. $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$

c. $F(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$;

d. $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

Exercice III ***(calculs tout en finesse de primitives)***

1)

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}\ ;\ \ F(x) = x - \ln(1+e^x)\ ;\ \ I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}\ ;\ \ F(x) = \ln(\ln x)\ ;\ \ I =]1\,;+\infty[$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $F(0) = 1$.

3) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0,2x^2 + \dfrac{2}{7}x - 11$; $g(x) = 5\sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x}$;

4) Exercices numéro : 56 page 383 du livre ; 41 *b)* seulement page 382 ; 42 *b)* page 382 ; 45 page 382

53 page 383 ; 48 *b)* page 383 ; 50 page 383

5) Une dernière question déjà plus sympathique : (uniquement pour ceux voulant aller en CPGE).

f est la fonction définie sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan(x) \overset{déf.}{=} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) Vérifier que $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

b) En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et qui s'annule en 0.

c) En déduire les primitives de la fonction h définie sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = \tan^2(x)$.

Exercice IV

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois fonctions sur un intervalle I : f, sa dérivée f' et une de ses primitives F.

Identifier, en justifiant, chacune de des courbes.