Ce travail est à rendre pour le Jeudi 18 Mai. Il permet une sommaire révision sur l'exponentielle, et surtout de travailler le produit scalaire.

Vous rendrez ce devoir par groupe de trois ou quatre élèves, avec les noms de chacun d'eux sur chacune des copies rendues.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

1) Expliquer pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que A appartient à $\mathscr{C}_f$.
2) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en le point A est la droite (AB).

Exercice II

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

Affirmation 1 : “ La population augmente en permanence ”.

Affirmation 2 : “ Il y aura toujours plus de 21000 bactéries ”.

Exercice III

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ du plan, soit A(-4 ; 1) et B(3 ; 0).

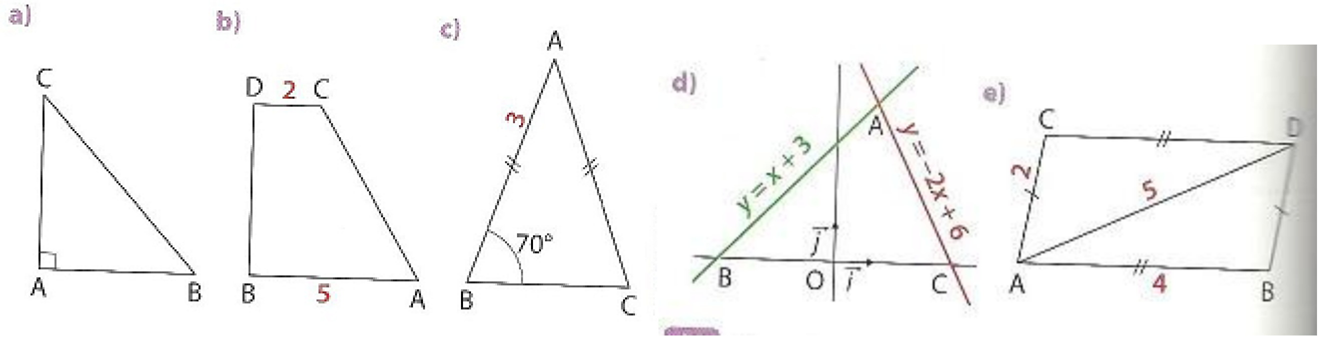
En utilisant le produit scalaire, déterminer les coordonnées du point C de telle sorte que C appartienne à l'axe des ordonnées et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Soit I le point de coordonnées I(1 ; 0). En détaillant votre démarche, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{IAB}$ arrondie au degré près.

Exercice IV

1)

Pour chacune des figures suivantes, calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Pour la question *e*) on commencera par prouver que :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = 0{,}5(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

2) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, sachant que $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$, et que le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est orthonormé.

Exercice V

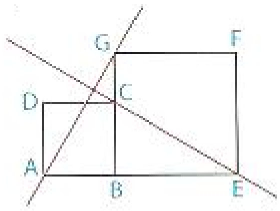
1a) Etablir que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

1b) En déduire que si ABCD est un parallélogramme, alors $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

1c) ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 6$, $BC = 4$ et $AC = 8$. Calculer la longueur de la diagonale [BD].

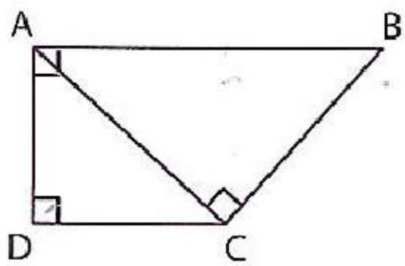
Exercice VI

ABCD et BEFG sont deux carrés.



En détaillant votre démarche, démontrer avec soin que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

Exercice VII



ABCD est un trapèze rectangle, et sa diagonale [AC] est perpendiculaire au côté [BC].

1) *a)* Sans repère, exprimer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $AC^2 = AB \times CD$.

2) (Question facultative mais intéressante) Retrouver le résultat de *1b)* en utilisant un repère bien choisi.