

**Nota bene** : ce travail est à rendre pour le 23 Février. Il fait une synthèse sur le chapitre primitives et équations différentielles.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

**Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.**

### Exercice I

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{x^2}$ .

La primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $F(0) = 1$  est définie par :

a.  $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$  ;

b.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c.  $F(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$  ;

d.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$

### Exercice II (calculs tout en finesse de primitives)

- 1) Prouver dans les cas suivantes que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ .

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} ; F(x) = x - \ln(1+e^x) ; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; F(x) = \ln(\ln x) ; I = ]1; +\infty[$$

- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie :  $F(0) = 1$ .

- 3) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0,2x^2 + \frac{2}{7}x - 11 \quad ; \quad g(x) = 5\sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x} \quad ;$$

- 4) Exercices numéro : 56 page 383 du livre ; 41 b) seulement page 382 ; 42 b) page 382 ; 45 page 382

53 page 383 ; 48 b) page 383 ; 50 page 383

5) Une dernière question déjà plus sympathique : (uniquement pour ceux voulant aller en CPGE).

$f$  est la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  [ par :  $f(x) = \tan(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) Vérifier que  $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

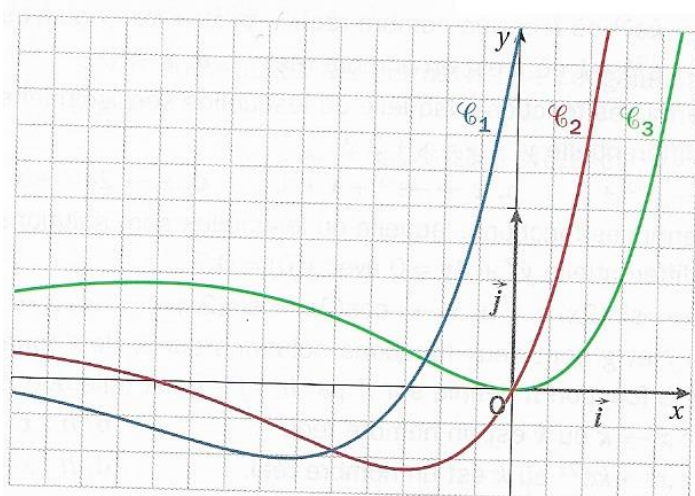
b) En déduire la primitive  $G$  de la fonction  $g$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  [ par :  $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$  et qui s'annule en 0.

c) En déduire les primitives de la fonction  $h$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  [ par :  $h(x) = \tan^2(x)$ .

### Exercice III

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois fonctions sur un intervalle  $I$  :  $f$ , sa dérivée  $f'$  et une de ses primitives  $F$ .

Identifier, en justifiant, chacune de des courbes.



### Exercice IV

Exercices : 72 page 384 ; 75 page 384 ; 78 page 384 ; 81 page 384.

### Exercice facultatif

Exercice 18 page 14 du cours.

### Exercice V

Une étude s'intéresse au nombre de foyers possédant un écran plat à partir de l'an 2005.

Soit  $g(x)$  le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année  $x$ .

On pose  $x = 0$  en 2005,  $g(0) = 1$  et  $g$  est une solution, qui ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$(E) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction  $y$  qui ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$  et on pose  $z = \frac{1}{y}$ .

a. Montrer que  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $z$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E<sub>1</sub>) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que  $g$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ .

3. Étudier les variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

4. Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?