Nota bene ***: ce travail fait une révision sur l'ensemble de ce qui a été vu, et permet également de travailler la dernière partie de la géométrie dans l'espace . Il est à rendre pour le 28 Février.***
Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

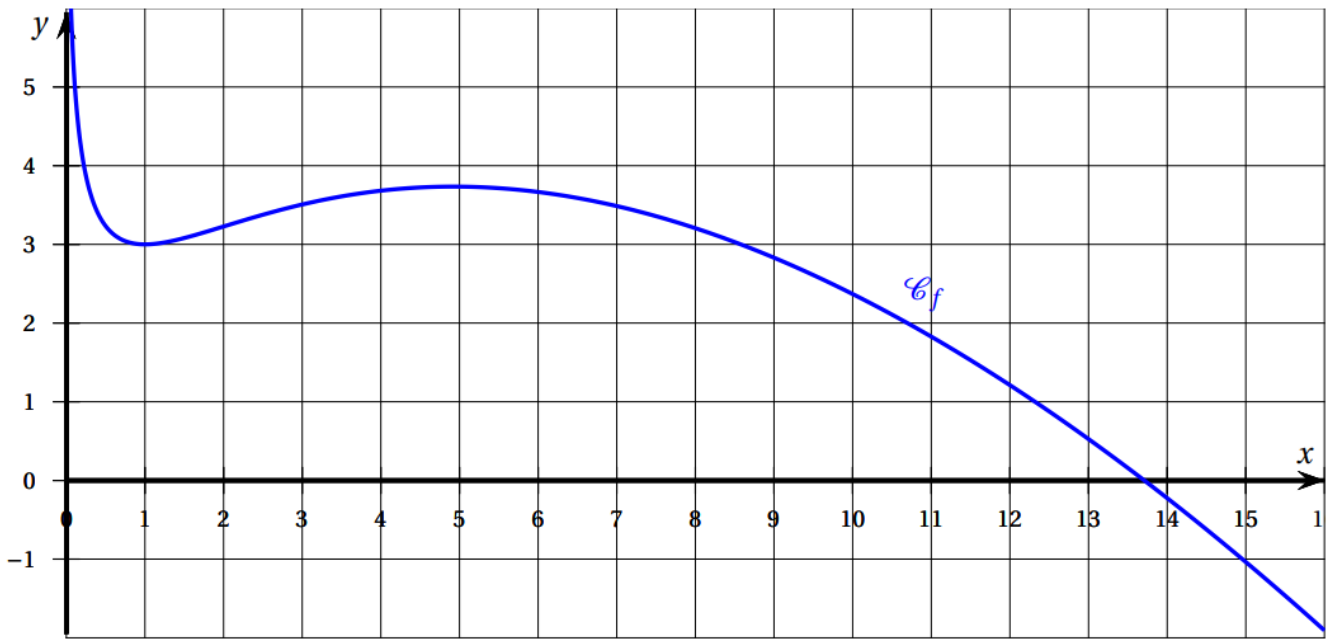
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercice II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{\,x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Calculer u_1 puis u_2.

   On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n):
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}(x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

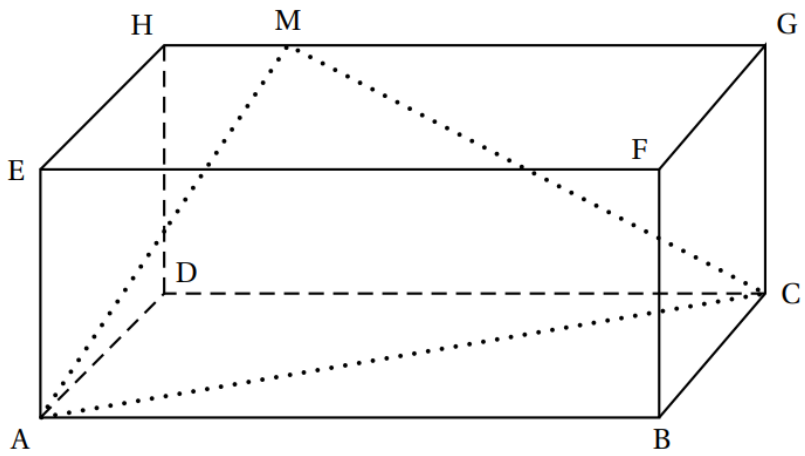
e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

Justifier que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à 0,5.

En déduire la valeur de ℓ.

Exercice III

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5 ; 0 ; 0), (0 ; 3 ; 0) et (0 ; 0 ; 2).



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

   a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.

   c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base $\times\, h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

   b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

   c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

Exercice IV

Dans un repère orthonormé de l'espace, soit E(-2,5 ; 0,5 ; - 1), D(3 ; 4 ; 3) et F(2 ; -1 ; 5).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$.

b) Démontrer que les points D, E et F définissent un unique plan.

c) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-9\\5\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DEF).

d) En déduire une équation cartésienne du plan (DEF).

e) Déterminer, en justifiant, une représentation paramétrique de la droite passant par E et dirigée par $\vec{n}$.

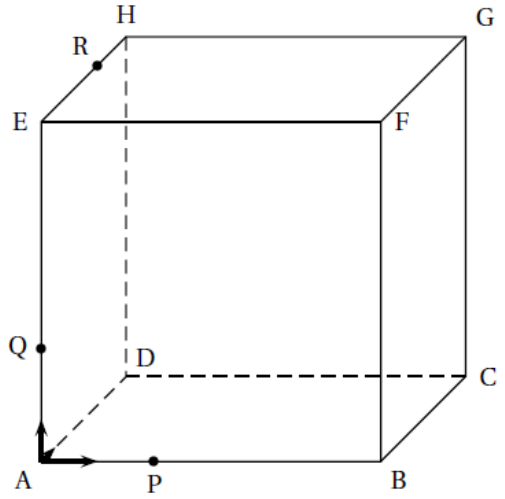
f) En déduire les coordonnées du point H, sachant que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (DF).

g) Calculer l'aire du triangle DEF

i) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF}$, déterminer, la valeur arrondie au degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$.

j) Lorsqu'on fait une projection orthogonale, y a-t-il conservation de la mesure des angles ? Justifier votre réponse à l'aide de la question *i)*.

Exercice V



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\ b\,;\ c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

   c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).

   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

Exercice VI

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0),\ B(6\,;\,-5\,;\,1),\ C(1\,;\,2\,;\,-2) \text{ et } S(13\,;\,37\,;\,54).$$

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b. Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. **a.** Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

   b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
   Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.

Exercice VII

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0{,}2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. **a.** Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.

   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   Démontrer que $p(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.
   b. Calculer $P(X = 7)$.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?