Première Maths Groupe 4 ***Devoir à la maison numéro 11*** ***Mars 2023***

Ce travail est à rendre pour le Mercredi 12 Avril. Il permet de travailler la fonction exponentielle et les suites.

Vous rendrez ce devoir par groupe de trois ou quatre élèves, avec les noms de chacun d'eux sur chacune des copies rendues.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Un volume constant (c'est-à-dire qui ne varie pas) de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- Au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau, et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau.
- Tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré dans le bassin A.
- Tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré dans le bassin B.

On note, pour tout entier naturel n :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du $n^{ième}$ jour de fonctionnement.
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du $n^{ième}$ jour de fonctionnement.

On a donc : $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1) Quelle relation simple, entre a_n et b_n, traduit la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2) Démontrer avec soin, que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3) On définit pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par : $u_n = a_n - 1320$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison ainsi que le premier terme de cette suite.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4) Etudier avec soin le sens de variation de la suite (a_n).

5a) A l'aide d'une calculatrice, quel constat faites-vous concernant la convergence de la suite (a_n) ?

5b) Interprétez *concrètement* le précédent résultat concernant le bassin A.

6) Ecrire un algorithme avec Python qui permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100. Qu'affiche-t-il en sortie ?

Exercice II

Simplifier au mieux chacune des expressions suivantes :

$A = e^4 \times e^{-5}$; $B = (e^{-2})^3$; $C = \dfrac{e^3}{e^{-2} \times e}$; $D = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^{-6} \times e^2}$; $E = (e^2)^3 \sqrt{16e}$

$F = \dfrac{(e^{4a})^3 \times e^a}{(e^a)^9}$; $G = \left(e^a - e^{-a}\right)^2 - e^{-a}(e^{3a} + e^{-a})$

Exercice III

1) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{3x-1} = e$; *b)* $e^{4x+1} = \frac{1}{e}$; *c)* $\left(e^{-x} - e\right)(e^x + 1) = 0$

d) $e^{\frac{-1}{4}x+1} - 1 = 0$; *e)* $e^{x^2} = e^{x+1}$;

f) $e^{3x} > 1$; *g)* $3xe^{-x} - e^{-x} \geq 0$; *h)* $\dfrac{e^x - e}{e^{x+4} - 1} \geq 0$; *i)* $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$

Exercice IV

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $-0,5$.

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (v_n) par : $v_n = e^{-u_n}$.

Démontrer que *(v_n)* est une suite géométrique dont on donnera la valeur du premier terme et la raison.

Exercice V

Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 3)e^x$.

Exercice VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{kx}$ où a, b, et k sont des réels avec $k > 0$.
La courbe représentative de f passe par le point A de coordonnées $(0; 10)$ et admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -5x$ en ce point. On sait de plus que la courbe représentative de f admet également une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1. Déterminer les valeurs de a, b et k.

Exercice VII

Exercice 103 page 179 du livre.

Exercice VIII

La population des États-Unis de 1790 à 1910 a été étudiée par Pearl et Reed en 1920. Ils définissent une fonction p par $p(t) = \dfrac{197273}{1 + 49,2e^{-0,03117t}}$ où $p(t)$ est exprimé en milliers d'invidus et t en années avec $t = 0$ pour l'année 1790.

1. Étudier les variations de la fonction p sur l'intervalle $[0; 120]$.

2. La population américaine s'élève en 2016 à 324 750 milliers d'habitants. On applique le modèle précédent, quelle est l'erreur commise en pourcentage ?