***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 2 Février. Il fait une synthèse sur le chapitre espace partie I, et permet aussi de revoir la fonction logarithme népérien et d'autres points.**

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

On se donne un repère de l'espace et on considère les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 4 ; 5) et C(0 ; 0 ; 11).

1*a*) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

1*b*) En déduire une représentation paramétrique de la droite passant par C et parallèle à (AB).

2) Montrer que A, B et C définissent un unique plan.

3) Soit D(3 ; 0 ; 1). Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) avec soin.

Qu'en déduisez-vous concernant les points A, B, C et D ?

4) Déterminer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère ACBE soit un parallélogramme.

Trouver les coordonnées du centre K du parallélogramme ACBE.

5) Soit F(-4 ; 4 ; 15).

Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera, tels que : $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Qu'en déduit-on ?

6) Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$. Caractériser cette droite.

7) Déterminer, en justifiant, si chacun des points W(0,4 ; 2,5 ; 1) et L(-9 ; 14 ; -21) appartient ou pas à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice II

Traiter les exercices suivants de votre livre numérique :

53 page 97 ; 100 page 104 ; 49 page 155 ; 53 page 156.

Exercice III

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse, une réponse multiple, ou l'absence de réponse à une question ne rapporte aucun point.

Reporter sur sa copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée, mais pour ce DM, vous pouvez toujours justifier si vous le voulez !

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

A(2 ; -2 ; 3), B(0 ; 2 ; 5), C(-1 ; 0 ; 4) et D(-2 ; 6 ; 1).

Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse B : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse D : $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2.

Réponse A : Les points A, B et C sont alignés.

Réponse B : ABCD est un parallélogramme.

Réponse C : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Réponse D : Les points A, B et D définissent un unique plan.

3. Soit d la droite passant par le point K milieu de [AB] et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les droites Δ et d sont :

Réponse A : Non coplanaires

Réponse B : Parallèles

Réponse C : Confondues

Réponse D : Sécantes

4. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : E(-3 ; 9 ; 5) **Réponse B :** F(7 ; -6 ; 1)

Réponse C : G(1 ; 0 ; 3) **Réponse D :** H(1 ; 2 ; 4)

Exercice IV

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

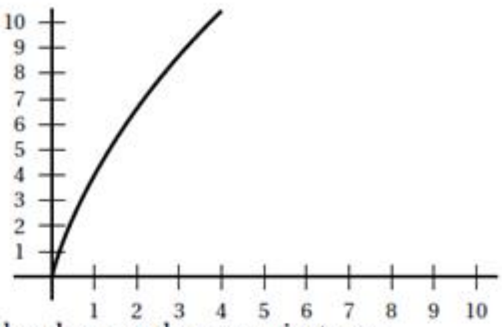
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. La première conjecture de l'élève (g est à valeurs positives) est-elle vraie ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

1a) Rappeler $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0.$ En déduire $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ (On attend une démonstration).

1b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

1c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - ln(x)$.

2b) Etudier le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation complet.

Que pensez-vous de la seconde conjecture de l'élève (g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$) ?

2c) Démontrer que sur $]0\ ;\ 5]$, l'équation : $4x - x\ln(x) = 7$ admet une unique solution notée α que l'on encadrera à 10^{-1} près.

3a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (notée C_g) en son point A d'abscisse a.

3b) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de tangentes à C_g qui passent par le point $B(1\ ;5)$. Toute trace de recherche, même incomplète, sera valorisée.

***<u>Exercice facultatif</u>* (pour se préparer au post bac) :**

Pour tout réel $a > 0$, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_2(3x) + \log_4(x^2) = 2$.

b) Calculer : $\log_2 \sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}$

c) Trouver la bonne réponse, en justifiant :

Sachant que $x = \ln \pi$, $y = \log_5 2$ et $z = e^{-\frac{1}{2}}$, alors :

(A) $x < y < z$ (B) $z < x < y$ (C) $z < y < x$ (D) $y < z < x$