Nota bene ***: ce travail porte sur la fonction ln. Il est à rendre pour le 31 Janvier. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.***

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

a) $ln(x+1) \leq 0$ *b)* $4e^{3x-1} = 1$ *c)* $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$

d) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait : $\alpha)\ 1 - 0{,}84^n > 0{,}95$; $\beta)\ 0{,}34^n < 10^{-6}$; $\gamma)\ \dfrac{1}{2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999$.

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^6 \times e^{0{,}25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au *doublement* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

Exercice II

Pour tout réel a, on considère la fonction notée f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^{a}$.

1) Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ? Justifier votre démarche.

Exercice III

Faire les exercices suivants du livre :

42 page 331 – 52 page 332 – 64 question *b*) uniquement page 332.

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
   b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice V

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a
   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$
   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.
   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. **a.** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

   e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import*
def pgm():
    u=4
    while u-14.2<0:
        u=5*log(u+13)
    return u
```

Remarque : sur Python, log désigne la fonction logarithme népérien.

0. Quel est le rôle de cet algorithme ?

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Annexe 1