Ce travail est à rendre pour le Jeudi 22 Mars.

Vous rendrez ce devoir par groupe de trois ou quatre élèves, avec les noms de chacun d'eux sur chacune des copies rendues.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

L'évolution d'une population de bactéries dépend de l'environnement dans lequel ces bactéries sont placées. Cette population peut être modélisée par la suite (P_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $P_{n+1} = (1+\alpha)P_n + \beta$, où α et β sont des paramètres liés à l'environnement, notamment à la température et à l'humidité.
P_n modélise alors le nombre de bactéries, en milliers, qui composent cette population n jours après les avoir introduites dans un certain environnement.

1. Une population, initialement composée de 500 mille bactéries, est étudiée dans un environnement pour lequel $\alpha = 0{,}2$ et $\beta = 70$.

a. Combien y a-t-il de bactéries dans cet environnement au bout de deux jours ?

b. Recopier et compléter le programme suivant, écrit en langage Python, pour que la fonction Nombrebacteries renvoie le nombre de bactéries présentes dans cet environnement au bout de N jours.

```python
def Nombrebacteries(N):
    P=500
    for i in range (0,N):
        P=...
    return ...
```

2. Une autre population, initialement composée de 500 mille bactéries, est étudiée dans un nouvel environnement. On constate que le nombre de bactéries de cette population augmente de 9 % par jour.

a. Déterminer les valeurs des paramètres α et β pour cet environnement.

b. Quelle est, dans ce cas, la nature de la suite (P_n) ?

c. Justifier qu'après 9 jours dans cet environnement, le nombre de bactéries de cette a doublé.

Exercice II

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice III

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.

En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Montrer que $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}(1 - 2n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5.Conjecturer à l'aide de votre machine à calculer la valeur de la limite de la suite (u_n).

Exercice IV

Vous empruntez un capital $C_0 = 300000$€ pour acheter votre maison.

La banque vous fait un prêt à 3 % d'intérêts, assurance inclue.

Cela signifie, que chaque année, vous devez donner à la banque 3 % du capital restant dû, sous forme d'intérêt d'emprunt, donc d'argent que vous donnez à la banque.

Le capital restant dû est par définition ce qu'il reste à rembourser.

Vous convenez de rembourser chaque mois, 1500€.

1) Au cours de la première année, quel est le montant des intérêts dus ? Quel capital C_1 reste-t-il à rembourser au bout d'une année ?

2) On appelle C_2 le capital restant dû au bout de deux ans. Etablir que $C_2 = 1{,}03C_1 - 18000$.

3) On appelle C_n le capital restant dû au bout de n années.

Etablir, que pour tout entier n, on a : $C_{n+1} = 1{,}03C_n - 18000$.

4) La suite (C_n) est-elle géométrique ?

5) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = C_n - 600000$.

a) Calculer u_0.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

d) En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

6a) Quelle sera approximativement la durée du prêt ? On utilisera une table de valeur de sa calculatrice et la relation du 5*d*).

6b) Combien aura coûté la maison en fin de compte ? Commenter le résultat obtenu.

Exercice IV

On considère le nombre $A = 2{,}84848484.....84$ où le bloc 84 est répété exactement n fois (n entier non nul).

1) En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique à définir, déterminer une fraction égale à A.

2) On admet que si $0 < Q < 1$, alors la suite (Q^n) converge vers 0. En utilisant ce résultat, donner la fraction irréductible égale à 2,848484............ lorsque le bloc 84 se répète indéfiniment.

Exercice V ***Le tapis de Sierpinski***

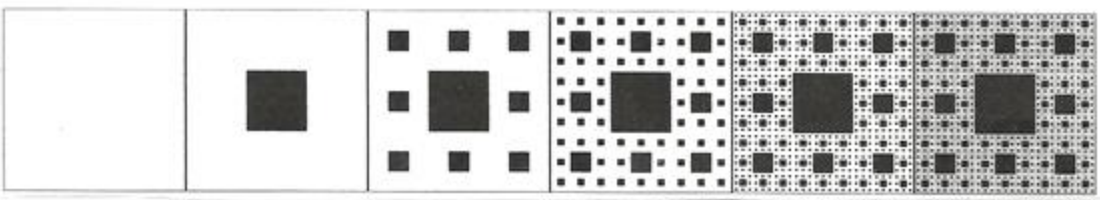
Un carré de 1 mètre de côté est divisé en 9 carrés de même taille, comme indiqué par la figure ci-dessous.

On colorie le carré central : premier coloriage.

Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés identiques comme indiqué sur la figure ci-dessous :

On colorie les huit carrés centraux obtenus (second coloriage).

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré : voici les premiers coloriages successifs obtenus :



Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages.

0) Déterminer, sous forme fractionnaire, A_1 et A_2.

1) En utilisant le fait qu'à chaque étape on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie encore non coloriée, établir que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\boxed{A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}}$.

2) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (B_n) par : $\boxed{B_n = A_n - 1}$.

a) Démontrer que (B_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b) En déduire l'expression de B_n puis celle de A_n en fonction de n.

c) Etudier le sens de variation de la suite (A_n).

d) Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de la suite (A_n) ?

e) Que déduisez-vous de ce dernier résultat concernant le tapis de *Sierpinski* ?

f) A l'aide d'un algorithme (capture d'écran sur Python) que l'on joindra à la copie, déterminer le nombre minimal de coloriages à effectuer afin que :

α) Au moins 80 % de l'aire du carré initial ait été coloriée après n coloriages.

β) Au moins 99 % de l'aire du carré initial ait été coloriée après n coloriages.

Culture : le tapis de *Sierpinski* est un exemple de fractale.